

Débruitage audio

Matthieu KOWALSKI

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modèles de bruits	2
2.1	Les bruits de fond	2
2.2	Bruits "impulsionnels"	4
3	Mesures de qualité	4
4	Suppression du bruit de fond	5
4.1	Estimation de la densité spectrale de puissance	5
4.2	Filtrage de Wiener	6
4.3	Soustraction spectrale	8
4.4	Estimateurs diagonaux	9
5	Suppression des clics/craquements	11
5.1	Détection des clics/craquements	11
5.2	Reconstruction des échantillons	14

1 Introduction

Origine des "bruits"

- Conditions de prises de sons (Concert en plein air)
- Bruits environnants (Applaudissements, personne qui tousse)
- Bruits électroniques (le "50 Hz")
- Saturation
- Dégradation de la qualité par codage (MP3)
- Dégradation des enregistrements
- etc.

Bruits considérés

- Bruits de fonds
- Craquements / clicks
- (Données manquantes)

Comment compenser ces dégradations ?

But de la restauration

Point de vue d'un ingénieur du son

"Tenter de retrouver le signal original n'a aucun sens. Il faut produire un nouveau signal de qualité acceptable"

Comment évaluer la qualité de restauration ?

Évaluation

Il faut distinguer deux types d'évaluations :

1. Le point de vue de l'ingénieur : il faut produire un signal de qualité acceptable à partir d'un enregistrement. **Mesure subjective** par définition.
2. Le point de vue du traicteur de signal : concevoir des algorithmes qui fonctionnent. Phase de test des algorithmes avec des **mesures objectives**.

Position du problème

On se limitera aux bruits additifs :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

avec

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^T$ le signal mesuré (de longueur T échantillons)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T$ le signal original (à estimer)
- $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^T$ un bruit additif

But

Estimer \mathbf{x} à partir des seules mesures \mathbf{y}

2 Modèles de bruits

2.1 Les bruits de fond

Définition

Définition

Un bruit de fond est un processus stationnaire.

Exemples

- Les "souffles"
- Les applaudissements
- bruits de roulements
- etc.

D'un point de vue modélisation statistique :

- Bruit blanc (processus gaussien)
- Bruit coloré (processus gaussiens)
- Tout processus stationnaire (définition)

Rappels

Processus stationnaire

Un processus est dit stationnaire si ses statistiques (moyenne, variance, etc) sont invariantes par translation.

Densité spectrale de puissance et théorème de Wiener-Khintchine

Soit X un processus stationnaire. La densité spectrale de puissance S_x est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation R_X .

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

On rappelle que :

$$S_X(f) = \mathbb{E} \left[|\hat{X}(f)|^2 \right] \quad R_X(t) = \mathbb{E} [x(\tau)x(\tau + t)]$$

Bruits blancs

Bruit blanc fort

Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire discret. X est un bruit blanc fort si les X_k sont centrés et i.i.d.

Bruit blanc faible

Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire discret. X est un bruit blanc faible si les X_k sont centrés, décorrélés et de variance finie.

Remarque

Pour les processus gaussien, les notions de bruits blancs forts et faibles sont confondues

Bruits blancs gaussiens

Théorème : bruit blanc gaussien

Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire discret. X est un bruit blanc gaussien ssi

- Les X_k sont indépendants
- $X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$

Propriétés

- La fonction d'autocorrélation est un dirac :

$$R_X(t) = \delta(t)$$

- La densité spectrale de puissance de X est constante :

$$S_x(f) = \sigma_X^2$$

Bruits gaussien colorés

Définition

X est un bruit gaussien coloré si X est un processus gaussien centré dont la densité spectrale de puissance n'est pas constante

Exemples

- Bruit rose : $S_X(f) = \frac{\alpha}{f}$, $\alpha > 0$
- Bruit rouge/brun/brownien : $S_X(f) = \frac{\alpha}{f^2}$
- Bruit bleu : $S_X(f) = \alpha f$
- Bruit violet : $S_X(f) = \alpha f^2$

Bruit gaussien non blanc

- Les bruits blancs et colorés sont des modèles théoriques.
- En pratique, on estime la densité spectrale du bruit S_X qui peut être quelconque.

Propriété

Soit X un processus gaussien et h un filtre. Soit

$$Y = h \star X$$

Alors

$$S_Y(f) = |h(f)|^2 S_X(f)$$

Bruit gaussien non blanc

En particulier

Soit X un processus gaussien de densité $S_X(f)$. Alors X peut être obtenu par filtrage d'un bruit blanc gaussien normé :

$$X = h \star N, \quad N \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

avec $S_X(f) = |h(f)|^2$

On a une manière simple générer n'importe quel type de bruit gaussien

Modèle des bruits de fond

On considèrera le problème :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

où

- \mathbf{n} est un bruit gaussien de densité spectrale inconnue (De-hissing)
- \mathbf{n} est un bruit supposé seulement stationnaire (ex : applaudissements)

2.2 Bruits "impulsionnels"

Définition et modèle

- Les "clicks" : bruit impulsionnel de très courte durée
- Les "craquements" : bruit impulsionnel de durée plus longue

Modèle

$$y_t = x_t + i_t n_t$$

- n_t est un processus aléatoire
- $i_t = 0/1$ un processus aléatoire binaire : $i_t = 1$ lorsque le bruit est présent.

Modèles aléatoires

Modèles simples

- Processus Bernoulli-Gaussien : $\mathbf{i} \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$
- Processus Poisson-Gaussien : $\mathbf{i} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$

Peut être satisfaisant pour les clics, mais pas pour les craquements

Modèles plus évolués

- Modéliser la durée du craquement : dépendances fortes entre les échantillons successifs de i
- Les amplitudes peuvent varier très fortement (et être très grande par rapport au signal original)
- Modèle de bruit transitoire par template

3 Mesures de qualité

Contexte

1. Mesures objectives (SNR)
2. Protocole d'évaluation subjective (MOS, MUSHRA)
3. Métrique perceptives PEAQ

Mesure objective : SNR

Modèle de bruit additif général :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

Définition : SNR d'entrée

Le rapport signal à bruit en entrée défini par :

$$\text{SNR}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 10 \log \left(\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \right)$$

Définition : SNR en sortie

Soit $\hat{\mathbf{x}}$ une estimation de \mathbf{x} . Le SNR en sortie est donnée par

$$\text{SNR}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = 10 \log \left(\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2} \right)$$

- Nécessite de connaître le "vraie" signal \mathbf{x} !
- Utile pour évaluer un algorithme sur des signaux test

Métrique perceptives : PEAQ

PEAQ

- Perceptual Evaluation of Audio Quality
- Mesure objective prenant en compte les propriétés connues de l'oreille humaine (masquage temps-fréquence)

Protocole d'évaluation subjective

Deux protocoles principaux :

1. MOS : Mean Opinion Score
2. MUSHRA : Multiple Stimuli with Hidden Reference and Anchor

MOS

N évaluateurs donne une note R_n entre 1 (Mauvais) et 5 (Excellent)

$$\text{MOS} = \frac{\sum_{n=1}^N R_n}{N}$$

MUSHRA

- Élaboré pour évaluer les codeurs avec perte. Toutes les versions compressées sont présentées en même temps, sur les mêmes signaux à tous les utilisateurs.
- Nécessite moins de participants que MOS.

4 Suppression du bruit de fond

Problèmes

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

avec \mathbf{n} bruit gaussien, de densité spectrale $S_{\mathbf{n}}(f)$ inconnue.

Hypothèse : on peut observer une partie du bruit "seul" $\mathbf{n}_K = (n_k)_0^{K-1}$

Comment estimer $S_{\mathbf{n}}(f)$ puis \mathbf{x} ?

4.1 Estimation de la densité spectrale de puissance

Périodogramme

Définition

C'est la transformée de Fourier sur K échantillons

$$P_K(f) = \frac{1}{K} \left| \sum_{k=0}^{K-1} n_k e^{-i \frac{2\pi}{K} f k} \right|^2$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} P_K(f) = S_{\mathbf{n}}(f)$$

Périodogramme

Propriété

C'est un estimateur asymptotiquement non biaisé, mais non consistant !

- Biais :

$$\mathbb{E}[P_K(f)] = S_{\mathbf{n}}(f) \star \hat{w}_B(e^{i2\pi f})$$

où w_B est la fenêtre triangulaire (de Bartlett). $\hat{w}_B(e^{i2\pi f}) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)} \right]^2$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[P_K(f)] = S_{\mathbf{n}}(f)$$

- Variance :

$$\text{Var}\{P_K(f)\} = S_{\mathbf{n}}(f)^2$$

Méthode de Bartlett

Idée : faire une moyenne de petits périodogramme.

Algorithme

1. On découpe \mathbf{n}_K en I périodogramme de même tailles $M = K/I$
2. On moyenne ces périodogrammes :

$$\hat{P}_M(f) = \sum_{i=1}^I P_M^i(f)$$

Méthode de Bartlett

Propriétés

Le périodogramme moyenné est un estimateur consistant

— Biais :

$$\mathbb{E} [\hat{P}_M(f)] = S_{\mathbf{n}}(f) \star \hat{w}_B(e^{i2\pi f})$$

— Variance :

$$\text{Var} \left\{ \hat{P}_M(f) \right\} \simeq \frac{1}{M} S_{\mathbf{n}}(f)$$

Mais on perd en résolution par rapport au périodogramme

Méthode de Welch

Deux modifications à la méthode de Bartlett :

1. Les sous-séquences de bruit peuvent se chevaucher
2. On utilise le périodogramme modifié : i.e. on multiplie les séquences par une fenêtre (en général de Hamming ou de Hann)

Cette méthode permet de réduire la variance de la méthode de Bartlett

4.2 Filtrage de Wiener

Calcul du filtre optimal

Rappel du modèle de bruit

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

avec \mathbf{n} bruit gaussien de densité spectrale $S_{\mathbf{n}}(f)$.

— On cherche à estimer \mathbf{x} par un filtre \mathbf{h} :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{h} \star \mathbf{y}$$

— tel que l'erreur quadratique soit minimale :

$$\mathbf{h} = \underset{\mathbf{h}}{\text{argmin}} \|\mathbf{x} - \mathbf{h} \star \mathbf{y}\|_2^2$$

Filtre de Wiener

La solution est donnée dans le domaine de Fourier par :

$$h(f) = \frac{\mathbb{E} [|\hat{\mathbf{x}}(f)|^2]}{\mathbb{E} [|\hat{\mathbf{x}}(f)|^2] + S_{\mathbf{n}}(f)} = \frac{\mathbb{E} [|\hat{\mathbf{x}}(f)|^2]}{\mathbb{E} [|\hat{\mathbf{y}}(f)|^2]}$$

Filtre de Wiener : inconvénients

Filtre de Wiener

La solution est donnée dans le domaine de Fourier par :

$$h(f) = \frac{E [|\hat{x}(f)|^2]}{E [|\hat{x}(f)|^2] + S_{\mathbf{n}}(f)} = \frac{E [|\hat{x}(f)|^2]}{E [|\hat{y}(f)|^2]}$$

- Il faut estimer $E [|\hat{x}(f)|^2]$
- \mathbf{x} ne peut pas être supposé comme stationnaire! Donc $E [|\hat{x}(f)|^2]$ varie au cours du temps.

Non stationnarité de \mathbf{x}

- On procède à un fenêtrage de \mathbf{x} , puis on calcule la TF dans chaque fenêtre : principe de la STFT (ou Gabor)!

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x} + \mathbf{n} \\ Y(t, f) &= X(t, f) + N(t, f), \forall(t, f) \end{aligned}$$

- On cherche à estimer $X(t, f)$ à partir de $Y(t, f)$ par un estimateur diagonal, i.e.

$$\hat{X}(t, f) = H(t, f)Y(t, f)$$

de sorte que

$$H = \underset{H}{\operatorname{argmin}} \sum_{t, f} |X(t, f) - H(t, f)Y(t, f)|^2$$

Solution du filtrage à la Wiener

$$\hat{X}(t, f) = H(t, f)Y(t, f)$$

avec

$$H(t, f) = \frac{E [|\mathbf{X}(t, f)|^2]}{E [|\mathbf{X}(t, f)|^2] + S_{\mathbf{n}}^w(f)} = \frac{E [|\mathbf{X}(t, f)|^2]}{E [|\mathbf{Y}(t, f)|^2]}$$

où $S_{\mathbf{n}}^w(f)$ est l'estimateur de Welch de $S_{\mathbf{n}}$, utilisant la même fenêtre et le même overlap que pour calculer la STFT de Y .

Reste le problème d'estimer $E [|\mathbf{X}(t, f)|^2]$

Estimation de $E [|\mathbf{X}(t, f)|^2]$

On a

$$Y(t, f) = X(t, f) + N(t, f)$$

\mathbf{x} et \mathbf{n} étant indépendant, on écrit

$$E [|\mathbf{Y}(t, f)|^2] = E [|\mathbf{X}(t, f)|^2] + S_{\mathbf{n}}(f)$$

Ce qui donne comme estimateur :

$$E [|\mathbf{X}(t, f)|^2] = E [|\mathbf{Y}(t, f)|^2] - S_{\mathbf{n}}(f)$$

On a obligatoirement $E [|\mathbf{X}(t, f)|^2] \geq 0$:

$$E [|\mathbf{X}(t, f)|^2] = (E [|\mathbf{Y}(t, f)|^2] - S_{\mathbf{n}}(f))^+$$

Ce qui, avec un estimateur ponctuel pour $E [|\mathbf{Y}(t, f)|^2]$ et l'estimateur de Welch pour la dsp du bruit, donne :

$$H(t, f) = \frac{(|Y(t, f)|^2 - S_{\mathbf{n}}^w(f))^+}{|Y(t, f)|^2}$$

Estimateur diagonal de Wiener empirique

En pratique, on a donc l'estimateur suivant :

Estimateur diagonal de Wiener "empirique"

$$\begin{aligned}\hat{X}(t, f) &= H(t, f)Y(t, f) = \frac{(|Y(t, f)|^2 - S_{\mathbf{n}}^w(f))^+}{|Y(t, f)|^2} Y(t, f) \\ &= Y(t, f) \left(1 - \frac{S_{\mathbf{n}}^w(f)}{|Y(t, f)|^2} \right)^+\end{aligned}$$

En définissant le rapport signal à bruit ponctuel

$$\rho(t, f) = \frac{(|Y(t, f)|^2 - S_{\mathbf{n}}^w(f))^+}{S_{\mathbf{n}}^w(f)}$$

on peut réécrire l'estimateur comme

$$\hat{X}(t, f) = \frac{\rho(t, f)}{1 - \rho(t, f)} Y(t, f)$$

4.3 Soustraction spectrale

Soustraction spectrale de puissance

On repart de

$$E[|Y(t, f)|^2] = E[|X(t, f)|^2] + S_{\mathbf{n}}(f)$$

donnant l'estimation

$$E[|X(t, f)|^2] = E[|Y(t, f)|^2] - S_{\mathbf{n}}(f)$$

On a donc comme estimation de $|X(t, f)|$:

$$|\widehat{X}(t, f)| = \sqrt{|Y(t, f)|^2 - S_{\mathbf{n}}(f)}$$

Soustraction spectrale de puissance

Soustraction spectrale de puissance

En conservant la phase inchangée par rapport à l'observation et en respectant la positivité, on obtient l'estimateur de soustraction spectrale de puissance :

$$\begin{aligned}\hat{X}(t, f) &= Y(t, f) \sqrt{\frac{(|Y(t, f)|^2 - S_{\mathbf{n}}^w(f))^+}{|Y(t, f)|^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\rho(t, f)}{1 - \rho(t, f)}} Y(t, f)\end{aligned}$$

Inconvénients

- L'estimateur ponctuel de $E[|X(t, f)|^2]$ est un mauvais estimateur
- Apparition de "bruits musicaux"

Comment améliorer l'estimation en pratique ?

4.4 Estimateurs diagonaux

Estimateur diagonal

- On cherche une estimation diagonale de $X(t, f)$

$$\hat{X}(t, f) = A(t, f)Y(t, f)$$

- On introduit deux paramètres de puissance afin d'écrire les estimateurs précédent sous une forme générale :

$$A(t, f) = \left(\frac{|Y(t, f)|^\alpha - S_{\mathbf{n}}(f)}{|Y(t, f)|^\alpha} \right)^\beta$$

- Ainsi :
 - $\alpha = 2, \beta = 1$: estimateur de type Wiener
 - $\alpha = 2, \beta = \frac{1}{2}$: soustraction spectrale de puissance
 - $\alpha = 1, \beta = 1$: soustraction spectrale d'amplitude

Estimateurs diagonaux

- On cherche une estimation diagonale de $X(t, f)$

$$\hat{X}(t, f) = A(t, f)Y(t, f)$$

- On introduit un paramètre λ de sur/sous-estimation du bruit, afin de réduire le bruit musical :

$$A(t, f) = \left(\frac{|Y(t, f)|^\alpha - \lambda S_{\mathbf{n}}(f)}{|Y(t, f)|^\alpha} \right)^\beta$$

Estimateurs diagonaux

- Enfin, on laisse un "seuil" de bruit minimum, qui permettra de "masquer" certains bruits musicaux :

$$A(t, f) = \max \left(\gamma S_{\mathbf{n}}(f), \left(\frac{|Y(t, f)|^\alpha - \lambda S_{\mathbf{n}}(f)}{|Y(t, f)|^\alpha} \right)^\beta \right)$$

avec $0 < \gamma < 1$.

Modèles hybrides

Plusieurs paramètres interviennent :

- Les hyperparamètres $\gamma, \beta, \alpha, \lambda$
 - Les choix : $\alpha = 2, \beta = 1$ donnent de bons résultats...
 - λ doit être laissé comme paramètre libre
 - $\gamma \ll 1$
- Quelle forme de fenêtre, quelle taille de fenêtre, quel chevauchement ?

Choix de la fenêtre

Exemples de fenêtre

- Bartlett (ou triangulaire)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hann

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Choix de la fenêtre : forme

Exemples de fenêtre

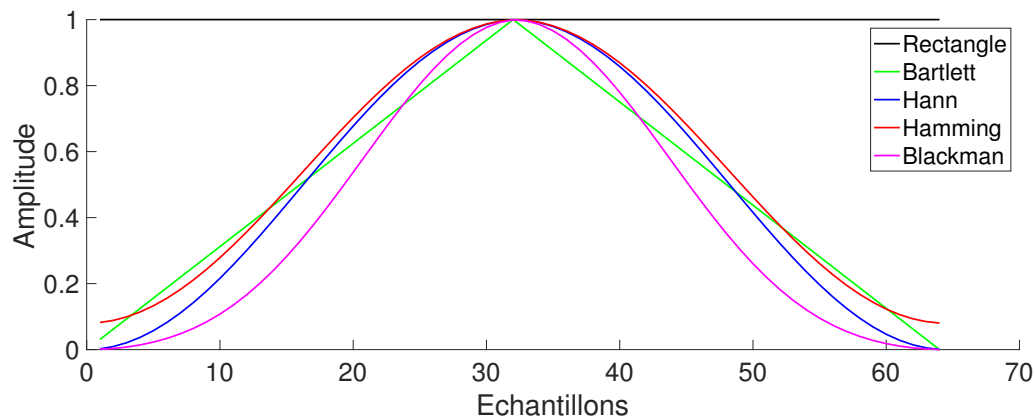
— Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Blackman

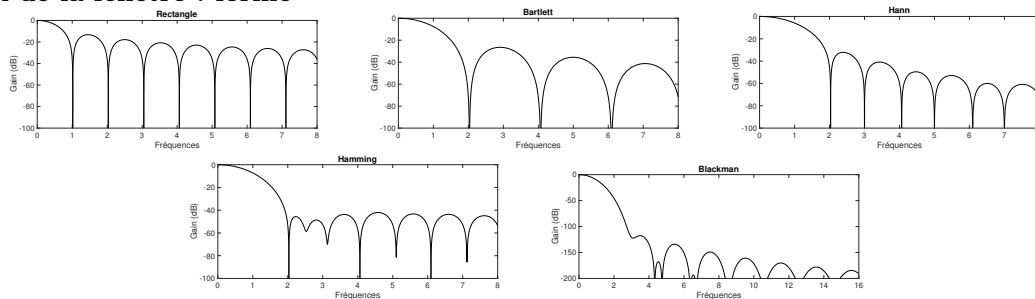
$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Choix de la fenêtre : forme



Fenêtres populaires : représentation temporel

Choix de la fenêtre : forme



Fenêtres populaires : gain fréquentiel

Choix de la fenêtre : forme

Caractéristiques principales

- Largeur du lobe principal
- Rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire
- L'atténuation minimale en bande atténuée

Type de fenêtre	Largeur du lobe principal	Rapport d'amplitude	Atténuation minimale
Rectangulaire	$4\pi/N$	-13 dB	-21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	-25 dB	-25 dB
Hann	$8\pi/N$	-31 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/N$	-41 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/N$	-57 dB	-74 dB

Choix de la fenêtre : taille

- Le choix de la taille de fenêtre est un compromis sur le principe d'incertitude d'Heisenberg :
- fenêtre courte : les "transitoires" sont privilégiés
 - fenêtre longue : les "tonals" sont privilégiés

Bon compromis : 1024 échantillons ($\simeq 23$ ms) pour un taux d'échantillonnage de 44.1 kHz

Choix de la fenêtre : overlap

- En pratique, on choisit un overlap de
- 50% si la rapidité doit être privilégiée
 - 75% pour une amélioration des résultats en pratique (plus de calculs)

Modèles hybrides

Définition

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{x} + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{x}_{trans} + \mathbf{x}_{ton} + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{\Phi}_{trans}\boldsymbol{\alpha}_{trans} + \mathbf{\Phi}_{ton}\boldsymbol{\alpha}_{ton} + \mathbf{n}\end{aligned}$$

(cf. cours approximation parcimonieuse)

- On utilise deux tailles de fenêtre
 - Une adaptée aux composantes transitoires (64 à 256 échantillons, ie 1.5 ms à 6 ms)
 - Une adaptée aux composantes tonales (1024 à 4096 échantillons, ie 23 ms à 93 ms)

Modèles Hybrides

Algorithme pratique

1. Débruitage avec une fenêtre adaptée au tonal : on obtient $\hat{\mathbf{x}}_{ton}$
2. Débruitage avec une fenêtre adaptée au transitoire sur le résidu $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_{ton}$: on obtient $\hat{\mathbf{x}}_{trans}$
3. $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{trans} + \hat{\mathbf{x}}_{ton}$

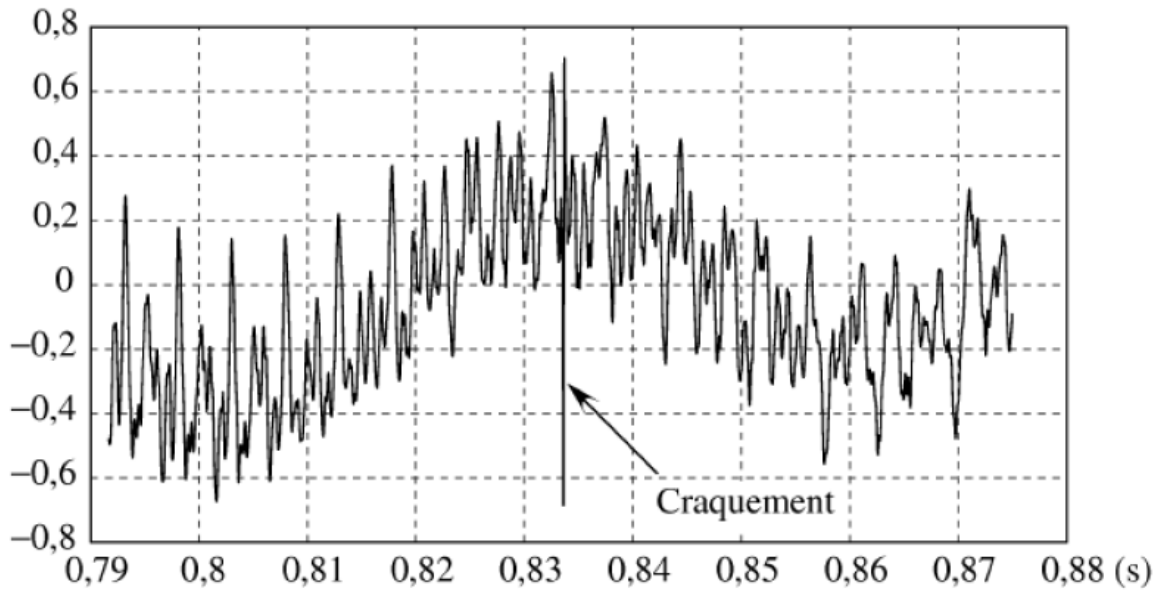
Modèles non diagonaux

- On peut utiliser tous les opérateurs de seuillage vus dans le cours "approximations parcimonieuses" :
- Seuillage dur (estimateur diagonal)
 - WG-Lasso
 - Persistent Empirical Wiener

5 Suppression des clics/craquements

5.1 Détection des clics/craquements

Clicks/craquements



Hypothèses

- Les clics/craquements sont rares (1% des échantillons)
- Leur durée est courte (de 1 à $\simeq 10$ échantillons)

Modèles

Modèle de bruit

$$y_t = x_t + n_t = x_t + i_t v_t$$

- v_t est un processus aléatoire
- $i_t = 0/1$ un processus aléatoire binaire : $i_t = 1$ lorsque le bruit est présent.

Différence fondamentale avec le bruit de fond : les bruits sont impulsionnels et donc très localisés !
On va travailler directement sur les échantillons temporels.

Quel modèle de signal permet de détecter les clics/cracks ?

Modèles

Modèle AR du signal

On suppose que \mathbf{x} est un signal auto-régressif (AR) d'ordre p :

$$x_t + \sum_{k=1}^p a_k x_{t-k} = e_t$$

où

- $\mathbf{a} = (a_k)$ sont les paramètres du modèle AR
- $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ est un bruit blanc gaussien

Idée générale

\mathbf{y} est donc un processus AR dont quelques échantillons sont corrompus. Si l'on suppose les paramètres du modèle connus (les (a_k) et σ_e), le schéma de détection serait :

1. Calcul de l'erreur de prédiction : $\epsilon_t = y_t + \sum_{k=1}^p a_k y_{t-k}$

2. Si $|\epsilon_t| > K\sigma_e$, alors $i_t = 1$, et 0 sinon.

avec $K \simeq 3$ si l'on suit la règle des 3σ pour la détection d'évènements rares.

Hypothèses

- Les clicks sont rares (1% des échantillons)
- Leur durée est courte (de 1 à $\simeq 10$ échantillons)
- On peut estimer le modèle AR dans une fenêtre courte (quelques centaines d'échantillons)
- En pratique $20 < p < 50$.

Estimation du modèle

1. On découpe \mathbf{y} par fenêtrage de taille M
2. On estime les paramètres AR (a_k) et σ_e dans chaque frame
3. On applique un seuil de détection

Détection des clics

Dans chaque frame de taille M

1. Estimation de la fonction d'autocorrélation

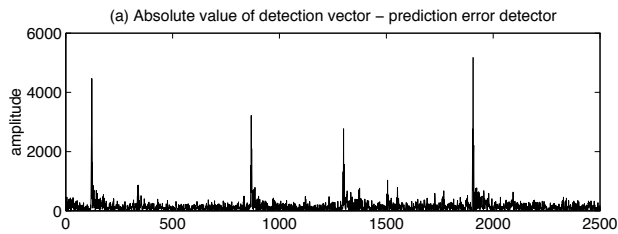
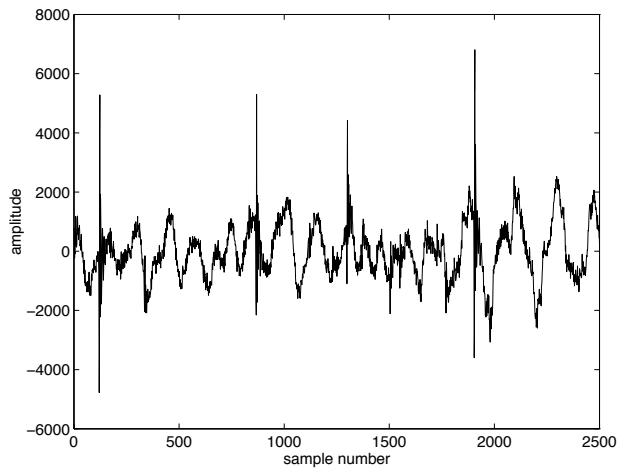
$$\hat{r}(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=t+1}^M x_k x_{k-t}$$

2. Écriture des équations de Yule-Walker

$$\begin{pmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(1) & \dots & \hat{r}(p-1) \\ \hat{r}(1) & \hat{r}(0) & \dots & \hat{r}(p-2) \\ & \vdots & & \\ \hat{r}(p-1) & \hat{r}(p-2) & \dots & \hat{r}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}(1) \\ \hat{r}(2) \\ \vdots \\ \hat{r}(p) \end{pmatrix}$$

3. Résolution des équations de Yule-Walker par un algorithme de Levinson-Durbin
4. Estimation de σ_e : $\hat{\sigma}_e = r(0) - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{r}$
5. Décision : $i_t = 1$ si $(\mathbf{y} + \mathbf{a} \star \mathbf{y})_t > \lambda \hat{\sigma}_e$

Détection des clicks/craquements



Détection des clics/craquements

Comment reconstruire la partie de signal corrompue ?

5.2 Reconstruction des échantillons

Reconstruction des échantillons

- Les clics sont détectés
- Le modèle impulsionnel est trop restrictif : en pratique, on considère I échantillons avant et après les clics/craquements détectés par $i_t = 1$.
- Idée général : interpoler le signal en utilisant les échantillons non corrompu avant et après la zone du craquement.

Interpolation Least Square AR (LSAR)

- Le modèle AR peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_p & a_{p-1} & \dots & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_p & a_{p-1} & \dots & a_2 & 1 \end{pmatrix}$$

- On réordonne \mathbf{x} , de manière à identifier les échantillons non corrompu et les échantillons corrompu :

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{U}\mathbf{x}_c$$

où \mathbf{U} et \mathbf{K} sont des matrices de réarrangement, formant une partition en colonne de la matrice identité.

Interpolation Least Square AR (LSAR)

- Le modèle s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{x}_c \\ &= \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c\end{aligned}$$

- L'erreur quadratique du modèle de prédiction s'écrit alors :

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c)^T (\mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c)$$

- Pour minimiser cette erreur par rapport à \mathbf{x}_c , on annule la dérivée

$$\frac{\partial \|\mathbf{e}\|^2}{\partial \mathbf{x}_c} = 2\mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}_c} \tag{1}$$

$$= 2(\mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c)^T \mathbf{A}_c = 0 \tag{2}$$

- Les échantillons sont donc reconstruit par

$$\mathbf{x}_c = -(\mathbf{A}_c^T \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{A}_c^T \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r$$