Analyse spectrale et filtrage idéal

Matthieu Kowalski

Table des matières

1 Préliminaires

Table des matières

Préliminaires

- Lire le fichier audio stereo et le convertir en un signal mono. Penser à enregistrer la fréquence d'échantillonnage !
- Après écoute du signal
  - Estimez sa durée approximative : $\simeq$ 40s
  - Repérez les caractéristiques remarquables de ce son (répétition de motif, sons graves, sons aigus)
- Représentez les échantillons temporels selon un axe adapté en seconde.

2 Étude fréquentielle

2.1 Rappels : transformée de Fourier à temps discret

Rappels sur la transformée de Fourier à temps discret – 1

Définition
Soit x un signal discret (non nécessairement fini). Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-i2\pi k\nu}$$

Remarque
Cette transformée est continue, 1-périodique !

Inversion

$$x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu$$

Rappels sur la transformée de Fourier à temps discret – 2

Propriétés

Soit x et y deux signaux discrets (non nécessairement finis)

— Plancherel-Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 = \|\hat{x}\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{x}(\nu)|^2 \, \mathrm{d}\nu$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_k = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{x}(\nu)\overline{\hat{y}(\nu)} \, \mathrm{d}\nu$$

— $\widehat{x \star y} = \hat{x} \cdot \hat{y}$

2.2 Transformée de Fourier Finie

Rappels sur la Transformée de Fourier Finie – 1

Définition

Soit $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ un signal numériques de N échantillons. Alors la transformée de Fourier discrète finie de s est donnée par :

$$\hat{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \ .$$

Inversion

On peut reconstruire le signal avec la formule d'inversion :

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \ .$$

Remarques

— La TFD est N-périodique.

— Elle suppose implicitement que le signal est aussi N-périodique !

Rappel sur la Transformée de Fourier Finie – 2

Propriétés

Soit $x = \{x_1, \ldots, x_N\}$ et $y = \{y_1, \ldots, y_N\}$

— Plancherel-Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N}\|\hat{x}\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}_k|^2$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_k = \frac{1}{N}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{y}_k$$

— $\widehat{x \star y} = \hat{x} \cdot \hat{y}$.

convolution périodique ! i.e. les signaux x et y sont supposés N-périodiques

2.3 Application

Étude fréquentielle

- Que représente le spectre d'un signal ?
  son contenu fréquentiel (penser aux notes de musiques !)
- Quel outil mathématique utilise-t-on pour l'obtenir à partir du signal temporel ?
  la transformée de Fourier (voir slides précédents – rappels sur la TF)
- Pourquoi cet outil est adaptée à la représentation spectrale ?
  voir slides précédents – rappels sur la TF
- Quelle est la fréquence max contenue dans le signal ?
  D'après le théorème d'échantillonnage : $f_{max} = \frac{f_e}{2}$
- Quel algorithme permet de calculer ce spectre ?
  la FFT
- Représentez le spectre du signal, avec un échelle adaptée en Hz

3 Filtrage idéal

3.1 Définitions

Filtrage

Définition
Un filtre est un système **linéaire** et **invariant dans le temps**. Il peut donc s'écrire comme une convolution.

Réponse impulsionnelle
Soit $\mathcal{S}$ un filtre. La réponse impulsionnelle h de $\mathcal{S}$ correspond à la sortie du système à l'impulsion unité (Dirac). Ainsi

$$h = \mathcal{S}(\delta)$$

et l'on a, pour tout signal x

$$y = \mathcal{S}(x) = h \star x = x \star h \quad y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Pour les signaux finis, la convolution suppose les signaux périodiques, de même période !

Filtres réalisables – 1

Filtre réalisable
Un filtre de réponse impulsionnelle h est réalisable ssi il est stable et causal.

Remarque 1

- Si un filtre est stable, alors il admet une transformée de Fourier
- Réciproquement, si un filtre admet une transformée de Fourier, alors il est stable.

Remarque 2

- Un filtre réalisable admet forcément une transformée de Fourier
- Si un filtre admet une transformée de Fourier il n'est pas forcément réalisable, car il peut ne pas être causal

Filtres réalisables – 2

Filtre stable
Un filtre de réponse impulsionnelle h est stable ssi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k| < +\infty$$

Filtre stable
Un filtre de réponse impulsionnelle h est causal ssi h est causal, ie

$$h_k = 0 \ \forall k < 0$$

Filtre réalisable
Un filtre de réponse impulsionnelle h est réalisable ssi il est stable et causal.

Filtrage et transformée de Fourier

Réponse en fréquence ou Gain complexe
La réponse en fréquence, ou gain complexe, d'un filtre est sa transformée de Fourier (quand elle existe !).

Filtrage dans le domaine fréquentielle
Soit $\mathcal{S}$ un filtre de impulsionnelle h et x un signal. On a

$$y = \mathcal{S}(x) = h \star x$$

Si h et x admettent une transformée de Fourier, on a dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{y} = \hat{h} \cdot \hat{x}$$

Filtrer un signal, c'est agir directement sur son spectre !

Apparté : transformée en Z – 1

Transformée de Fourier discrète
Soit un h un signal numérique (non nécessairement fini).

$$\hat{h}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

si on pose $z = e^{i2\pi\nu}$, la TF devient :

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

qui généralise la TF pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donne la transformée en z.

Transformée en z
Soit un h un signal numérique (non nécessairement fini). Sa transformée en z est donnée par

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que la série converge.

Apparté : transformée en Z – 2

Filtrage et TZ
Soient x et y deux signaux numériques et soit h la réponse impulsionnelle d'un filtre, tels que

$$y = h \star x$$

On note $X(z), Y(z)$ et $H(z)$ leurs transformée en z, alors on a

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Fonction de transfert
On appel fonction de transfert d'un filtre de réponse impulsionnelle h, sa transformée en z. Et donc

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Apparté : transformée en Z – 3

Filtres réalisables
On se limitera dans ce cours aux filtres stables. On confondra donc souvent sa fonction de transfert et sa réponse en fréquence

Propriétés
Les propriétés de la TF s'adaptent directement à la TZ. En particulier, le décalage : soit $y_n = x_{n-k}$, alors

$$Y(z) = z^{-k}X(z)$$

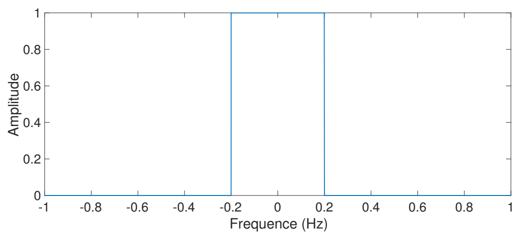
3.2 Filtres idéaux

Filtre passe-bas idéal – 1

Définition
La réponse en fréquence d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ν_0 est donnée par :

$$\hat{h}(\nu)^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < \nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

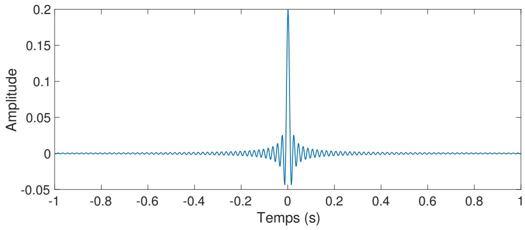
Réponse en fréquence



Filtre passe-bas idéal – 2

$$\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu} \,\mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu} \,\mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu}\right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}$$

Réponse impulsionnelle



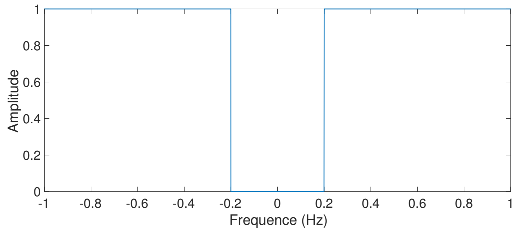
Filtre passe-haut idéal – 1

Définition

La réponse en fréquence d'un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure ν_0 est donnée par :

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\nu)^{\mathrm{ph}_{\nu_0}} &= \begin{cases} 0 & \text{si } |\nu| < \nu_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= 1 - \hat{h}(\nu)^{\mathrm{pb}_{\nu_0}}
\end{aligned}$$

Réponse en fréquence

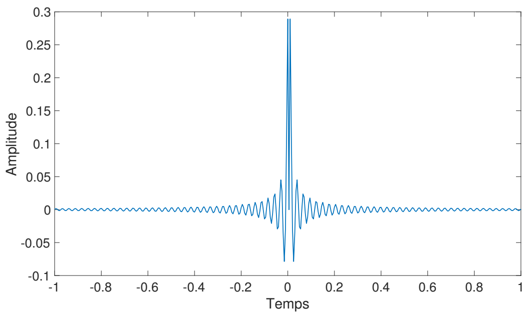


Filtre passe-haut idéal – 2

Réponse impulsionnelle

$$\begin{aligned}
h_0^{\mathrm{ph}_{\nu_0}} &= 0 \\
h_n^{\mathrm{ph}_{\nu_0}} &= -h_k^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} = -\frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n} \quad n \neq 0
\end{aligned}$$

Réponse impulsionnelle

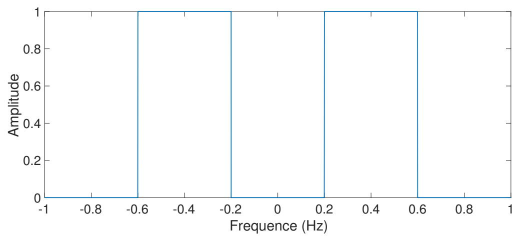


Filtre passe-bande – 1

Définition
La réponse en fréquence d'un filtre passe-bande idéal de fréquences de coupures $\nu_0 > 0$ et $\nu_1 > 0$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{h}(\nu)^{\text{pbande}_{\nu_0;\nu_1}} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_0 < \nu < \nu_1 \\ 1 & \text{si } -\nu_0 < -\nu < -\nu_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \hat{h}(\nu)^{\text{pb}_{\nu_1}} - \hat{h}(\nu)^{\text{pb}_{\nu_0}}\end{aligned}$$

Réponse en fréquence

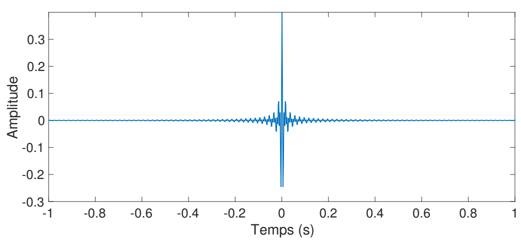


Filtre passe-bande idéal – 2

Réponse impulsionnelle

$$h_k^{\text{pbande}_{\nu_0;\nu_1}} = h_k^{\text{pb}_{\nu_1}} - h_k^{\text{pb}_{\nu_0}} = \frac{\sin(2\pi\nu_1 n)}{\pi n} - \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}$$

Réponse impulsionnelle



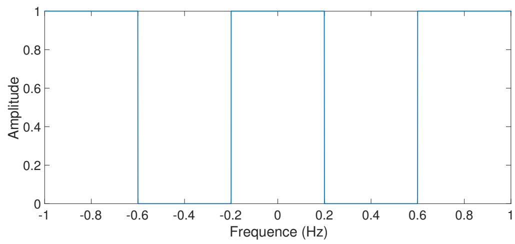
Filtre coupe-bande idéal – 1

Définition

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bande idéal de fréquences de coupures $\nu_0 > 0$ et $\nu_1 > 0$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{h}(\nu)^{\text{cbande}_{\nu_0;\nu_1}} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \nu_0 < \nu < \nu_1 \\ 0 & \text{si } -\nu_0 < -\nu < -\nu_1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= 1 - \hat{h}(\nu)^{\text{pbande}_{\nu_0;\nu_1}} \\ &= 1 - \hat{h}(\nu)^{\text{pb}_{\nu_1}} + \hat{h}(\nu)^{\text{pb}_{\nu_0}}\end{aligned}$$

Réponse en fréquence

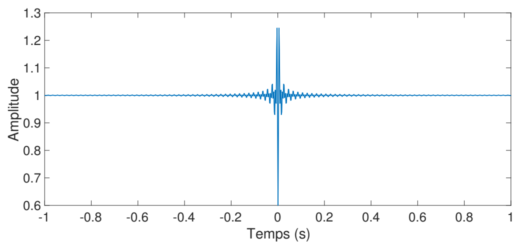


Filtre coupe-bande idéal – 2

Réponse impulsionnelle

$$\begin{aligned}h_k^{\text{cbande}_{\nu_0;\nu_1}} &= 1 - h_k^{\text{pbande}_{\nu_0;\nu_1}} \\ &= 1 - h_k^{\text{pb}_{\nu_0}} + h_k^{\text{pb}_{\nu_1}} \\ &= 1 - \frac{\sin(2\pi\nu_1 n)}{\pi n} + \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}\end{aligned}$$

Réponse impulsionnelle



3.3 Application

Creation du filtre dans le domaine fréquentiel

- Choisir une fréquence de coupure (ex : 8000 Hz)
- Creer le filtre
- Afficher sa réponse en fréquence avec une échelle adaptée

Filtrage du signal

- Pourquoi le filtre dont le module est représenté ici est bien un filtre passe-bas idéal ? cf. slide 32
- Quelle opération mathématique permet d'effectuer le filtrage, à partir de la réponse en fréquence du filtre ?
  une simple multiplication
- Effectuer le filtrage passe-bas

— Reconstruire le signal audio filtré

— Quel est l'inconvénient majeur de cette méthode ?

On doit disposer de l'ensemble des échantillons : impossible de faire du filtrage temps-réel.