Synthèse de filtres IIR (ou ARMA)

Matthieu Kowalski

Univ Paris-Sud
L2S (GPI)

Plan

Préliminaires

- Lire le fichier audio
- Représenter ses échantillons sur une échelle adaptée
- Représenter son spectre sur une échelle adaptée
- Créer un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c choisie, dans le domaine fréquentiel.
- Représenter le spectre du filtre passe bas idéal.

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu}\right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}$$

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$
\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu} \right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale ?

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$
\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu} \right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale ?
  Cette RI est à support infini, est stable (elle admet une TF), mais n'est pas causal (définie pour $k < 0$)

Plan

Filtres – équation aux différences

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Alors le signal y, version filtrée du signal x par h est donnée par :

$$y_n = (h \star x)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Comment réaliser un tel filtre en "temps réel"?

Rappel : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

Rappel : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Rappel : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?

Rappel : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?
  La réponse impulsionnelle est à support infini : on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.

Rappel : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?
  La réponse impulsionnelle est à support infini : on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.
- Le filtre sera-t-il réalisable ? Pourquoi ?

Rappel : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?
  La réponse impulsionnelle est à support infini : on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.
- Le filtre sera-t-il réalisable ? Pourquoi ?
  Le filtre n'est pas réalisable car il n'est pas causal.

Rappel : Synthèse de filtre FIR par fenêtrage

RI du filtre FIR causal

$$y_n = \sum_{k=0}^{K} h_k x_{n-k}$$

Synthèse par fenêtrage

- Calcul de la RI h^{ideal} par TF inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} \,\mathrm{d}\nu$$

- Fenêtrage de la RI h^{ideal}

$$h^{\text{win}} = w \cdot \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \ldots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

- Application d'un retard sur h^{tronc}, afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{win}}$$

Plan

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage à h^{ideal}

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage à h^{ideal}
- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue, en dB.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage à h^{ideal}
- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue, en dB.
- Comparer au gain du filtre idéal.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage à h^{ideal}
- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue, en dB.
- Comparer au gain du filtre idéal.
- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.

Plan

Analyse de l'approche FIR

On approche un filtre idéal par un filtre FIR :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \simeq \sum_{k=0}^{K-1} h_k x_{n-k} \ .$$

Analyse de l'approche FIR

On approche un filtre idéal par un filtre FIR :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \simeq \sum_{k=0}^{K-1} h_k x_{n-k} \ .$$

Exemple du Passe-Bas :

$$h_n^{ideal} = \frac{\sin(2\pi\xi_0 n)}{\pi n} \ .$$

Analyse de l'approche FIR

On approche un filtre idéal par un filtre FIR :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \simeq \sum_{k=0}^{K-1} h_k x_{n-k} \ .$$

Exemple du Passe-Bas :

$$h_n^{ideal} = \frac{\sin(2\pi\xi_0 n)}{\pi n} \ .$$

- Les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre décroissent en $\frac{1}{n}$.

Analyse de l'approche FIR

On approche un filtre idéal par un filtre FIR :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \simeq \sum_{k=0}^{K-1} h_k x_{n-k} \ .$$

Exemple du Passe-Bas :

$$h_n^{ideal} = \frac{\sin(2\pi\xi_0 n)}{\pi n} \ .$$

- Les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre décroissent en $\frac{1}{n}$.
- Si l'on veut approcher ce filtre avec une erreur d'environ 10^{-6}, il faudra de l'ordre de un million de coefficients !

Analyse de l'approche FIR

On approche un filtre idéal par un filtre FIR :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \simeq \sum_{k=0}^{K-1} h_k x_{n-k} \ .$$

Exemple du Passe-Bas :

$$h_n^{ideal} = \frac{\sin(2\pi\xi_0 n)}{\pi n} \ .$$

- Les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre décroissent en $\frac{1}{n}$.
- Si l'on veut approcher ce filtre avec une erreur d'environ 10^{-6}, il faudra de l'ordre de un million de coefficients !
- Il faut donc compter dix milliard d'opérations par secondes pour traiter un signal de paroles échantillonné à 10 kHz.

Filtres récursifs

Idée : utiliser des filtres récursifs.

Filtres récursifs

Idée : utiliser des filtres récursifs.

On cherche y sous la forme :

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

Filtres récursifs

Idée : utiliser des filtres récursifs.

On cherche y sous la forme :

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

- Le coefficient de sortie y_n dépends des coefficients précédents déjà calculé !

Filtres récursifs

Idée : utiliser des filtres récursifs.

On cherche y sous la forme :

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

- Le coefficient de sortie y_n dépends des coefficients précédents déjà calculé !
- Le coefficient y_n est obtenu par filtrage des $\mathbf{x_m}$ **antérieurs** à n **et** filtrage des $\mathbf{y_m}$ **antérieur** à n en utilisant les filtres de RI $\{b_0, \ldots, b_M\}$ et $\{a_1, \ldots, a_N\}$.

Filtres récursifs

Idée : utiliser des filtres récursifs.

On cherche y sous la forme :

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

- Le coefficient de sortie y_n dépends des coefficients précédents déjà calculé !
- Le coefficient y_n est obtenu par filtrage des $\mathbf{x_m}$ **antérieurs** à n **et** filtrage des $\mathbf{y_m}$ **antérieur** à n en utilisant les filtres de RI $\{b_0, \ldots, b_M\}$ et $\{a_1, \ldots, a_N\}$.
- Si cette équation a une solution unique, alors c'est un filtre récursif.

Filtres récursifs

Idée : utiliser des filtres récursifs.

On cherche y sous la forme :

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

- Le coefficient de sortie y_n dépends des coefficients précédents déjà calculé !
- Le coefficient y_n est obtenu par filtrage des $\mathbf{x_m}$ **antérieurs** à n **et** filtrage des $\mathbf{y_m}$ **antérieur** à n en utilisant les filtres de RI $\{b_0, \dots, b_M\}$ et $\{a_1, \dots, a_N\}$.
- Si cette équation a une solution unique, alors c'est un filtre récursif.
- On suppose $M \leq N$. N est l'ordre du filtre.

Filtres récursifs : analyse

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k}$$

Après TZ :

$$Y(z)\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) \Leftrightarrow V(z) \quad = H(z)U(z)\ .$$

avec

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}\ .$$

La fonctionede transfert est une **fraction rationnelle**. Le filtre existe ssi le dénominateur ne s'annule jamais

Filtres récursifs : AR vs ARMA

Filtre autorégressif ou AR

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \ .$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

Filtre autorégressif à moyenne mobile ou ARMA

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \ .$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$$

Filtres ARMA réalisables

Causalité

Un filtre est causal ssi H est défini pour tout $|z| > r$

Stabilité

- Un filtre est stable ssi H est défini pour tout $|z| = 1$.
- Un filtre ARMA est stable ssi les pôles z_d sont tels que $|z_d| \neq 1$

Filtres ARMA réalisables

Un filtre ARMA est réalisable ssi H est défini pour tout $|z| > r$ avec $r < 1$

Plan

Plan

Grandes étapes

- Définir un gabarit de filtre analogique
- Approcher ce gabarit par la fonction de transfert d'un filtre de type donné (Butterworth, Tchebychev, ...)
- Transformer la fonction de transfert analogique en fonction de transfert numérique

Filtrage analogique

Domaine temporel

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) \star x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)x(t-s)\mathrm{d}\, s \end{aligned}$$

Transformée de Laplace

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

avec

$$H(p) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-ipt}\mathrm{d}\, t$$

H est la fonction de transfert du filtre de RI h.

Méthode de conversion d'un filtre analogique en numérique

- Invariances impulsionnelle (on cherche h_n comme l'échantillonnage de $h(t)$)
- Transformation d'Euler (Approximation d'une dérivée continue en discret)
- Transformation bilinéaire (la plus classique)

Plan

Plan

5 Choix du filtres numériques
- Spécifications
- Filtres classiques

Spécification

Spécification générale

- Choix du type : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...
- Choix du Gabarit

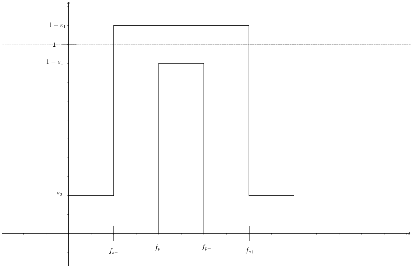
Spécifications particulières

- Bande passante $[f_{p-}, f_{p+}]$
- Bande atténuée $[0, f_{a-}]$ $[f_{a+}, 0.5]$
- Ondulation en bande passante ε_1
- Ondulation en bande atténuée ε_2

Spécification

Spécifications particulières

- Bande passante $[f_{p-}, f_{p+}]$
- Bande atténuée $[0, f_{s-}]$ $[f_{s+}, 0.5]$
- Ondulation en bande passante ε_1
- Ondulation en bande atténuée ε_2



Plan

5. Choix du filtres numériques
   - Spécifications
   - Filtres classiques

3 grandes familles

- Filtres de Butterworth
- Filtres de Tchebychev I et II
- Filtre Elliptique
- (+ Filtres de Bessel)

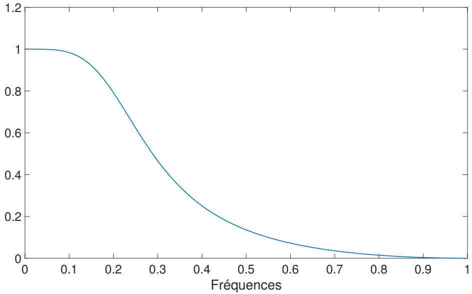
Filtres de Butterworth

Fonction de tranfert

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$$

Caractéristiques

- Fréquence de coupure f_c
- Ordre N
- Module de la fonction de transfert monotone



Filtres de Tchebychev I

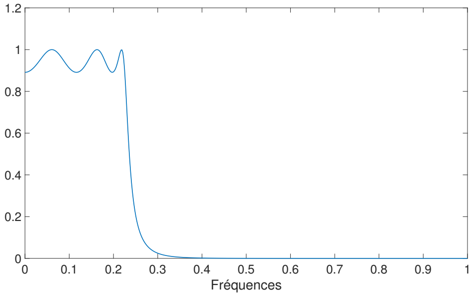
Fonction de tranfert

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f}{f_p}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N

Caractéristiques

- Bande passante f_p
- Ondulation en bande passante ε
- Ordre N
- Monotone en bande atténuée



Filtres de Tchebychev II

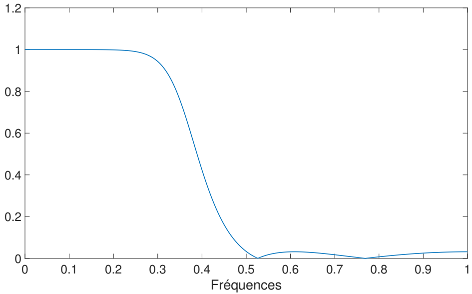
Fonction de tranfert

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f_s}{f}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N

Caractéristiques

- Bande atténuée f_s
- Monotone en bande passante
- Ondulation en bande atténuée ε
- Ordre N



Filtres elliptiques

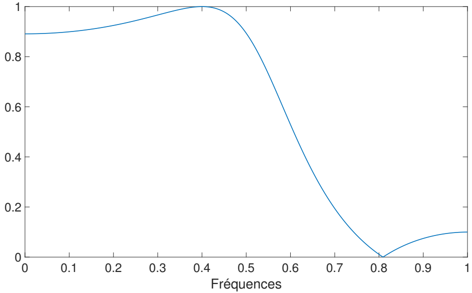
Fonction de tranfert

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_N^2\left(\frac{f}{\sqrt{f_p f_s}}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N

Caractéristiques

- Bande passante f_p
- Bande atténuée f_s
- Ondulation en bande atténuée et en bande atténuée ε
- Ordre N



Filtres FIR ou IIR ?

Particularités des filtres FIR

- Bande de transition large
- Synthèse simple
- Stabilité
- Facilité d'implémentation

Particularités des filtres IIR

- Bande de transition étroite
- Synthèse à partir d'un filtre analogique
- Peut être instable