1) Tracé du billard quartique $f(x,y) = ax^4 + 2b\,x^2y^2 + \frac{y^4}{a} - 1 = 0 \quad a>1 \quad b>-1$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$\rho^4 \underbrace{\left(a\cos^4\theta + 2b\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{a}\right)}_{u} = 1$$

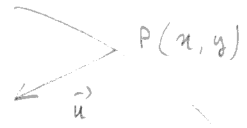
u peut-il s'annuler ? on pose $\cos^2\theta = c \quad \sin^2\theta = 1-c \quad 0 \leq c \leq 1$

$$u = a\,c^2 + 2b\,c(1-c) + \frac{(1-c)^2}{a} = c^2\left(a - 2b + \frac{1}{a}\right) + 2\left(b - \frac{1}{a}\right)c + \frac{1}{a^2}$$

racines si :

$$\left(b - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - 2b + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{a^2} \geq 0 \quad ?$$

2) On se donne un point $P(x,y)$ sur la courbe et un vecteur unitaire dirigé vers l'intérieur, on veut calculer la position du rebond suivant



$\vec{PQ} = \lambda\vec{u} \quad \lambda \geq 0 \qquad \vec{u}(\alpha,\beta)$

$$a(x+\lambda\alpha)^4 + 2b(x+\lambda\alpha)^2(y+\lambda\beta)^2 + (y+\lambda\beta)^4/a - 1 = 0$$

$\lambda = 0$ est une racine donc λ doit pouvoir être mis en facteur

$$a(\cancel{x^4} + 4x\lambda^3\alpha^3 + 6x^2\lambda^2\alpha^2 + 4x^3\lambda\alpha + \lambda^4\alpha^4)$$

$$+ 2b(x^2 + 2x\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2)(y^2 + 2y\lambda\beta + \lambda^2\beta^2)$$

$$+ (\cancel{y^4} + 4y\lambda^3\beta^3 + 6y^2\lambda^2\beta^2 + 4y^3\lambda\beta + \lambda^4\beta^4)/a \cancel{-1} = 0$$

$$2b(\cancel{x^2y^2} + 2x^2y\lambda\beta + x^2\lambda^2\beta^2 + 2x\lambda\alpha y^2 + 4xy\lambda^2\alpha\beta + 2x\lambda^3\alpha\beta^2 + \lambda^2\alpha^2y^2 + 2y\lambda^3\alpha^2\beta + \lambda^4\alpha^2\beta^2)$$

$$\lambda^3\left(a\alpha^4 + 2b\alpha^2\beta^2 + \beta^4/a\right) + \lambda^2\left[4ax\alpha^3 + 2b(2x\alpha\beta^2 + 2y\alpha^2\beta) + 4y\beta^3/a\right]$$

$$+ \lambda\left(6ax^2\alpha^2 + 2bx^2\beta^2 + 8bxy\alpha\beta + 2b\alpha^2y^2 + 6y^2\beta^2/a\right)$$

$$+ 4ax^3\alpha + 2b(2x^2y\beta + 2x\alpha y^2) + 4y^3\beta/a = 0$$

= équation du 3ème degré en λ à résoudre.

Eq du 3ème degré.

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

on pose $x = X - \alpha$

$$a(X-\alpha)^3 + b(X-\alpha)^2 + c(X-\alpha) + d = 0.$$

$$a(X^3 - 3X^2\alpha + 3X\alpha^2 - \alpha^3) + bX^2 - 2b\alpha X + b\alpha^2 + cX - c\alpha + d = 0$$

$$\alpha = b/3a$$

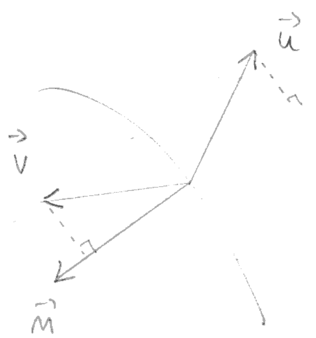
X vérifie : $a X^3 + (3a\alpha^2 - 2b\alpha + c) X - a\alpha^3 + b\alpha^2 - c\alpha + d = 0.$

$$X^3 + p X + q = 0$$

avec $p = (3a\alpha^2 - 2b\alpha + c)/a$ donne X donc x

$q = (-a\alpha^3 + b\alpha^2 - c\alpha + d)/a$

3) Calcul du vecteur unitaire porté par le rayon réfléchi



$\vec v = \gamma \vec u + \delta \vec n$

① $\vec v . \vec n = - \vec u . \vec n$ $\quad \gamma \vec u . \vec n + \delta = - \vec u \vec n$

② $\vec v$ unitaire $(\gamma \vec u + \delta \vec n)^2 = \gamma^2 + 2\gamma\delta \vec u \vec n + \delta^2 = 1$

On pose $\vec u . \vec n = \eta$

$$\left| \begin{array}{l} \eta(\gamma+1) + \delta = 0 \\ \gamma^2 + 2\gamma\delta . \eta + \delta^2 = 1 \end{array} \right.$$

$\gamma^2 - 2\gamma\eta^2(\gamma+1) + \eta^2(\gamma+1)^2 - 1 = 0$ (cf cas particulier ci-dessous

$\gamma^2(1 - 2\eta^2 + \eta^2) + \eta^2 - 1 = 0 \quad \gamma^2(1-\eta^2) = 1 - \eta^2$ si $\eta \neq 1 \Rightarrow \gamma = \pm 1$

① $\gamma = -1$ $\delta = 0$ c'est $-\vec u$ qui n'est pas la bonne solution.

② $\gamma = 1$ $\delta = -2\eta$ $\vec v = \vec u - 2\eta \vec n = \vec u - 2(\vec u . \vec n)\vec n$

Cas particulier $\eta = \pm 1$

$\vec u \vec n = 1$ $\quad \vec u = \vec n$ incidence normale $\vec v = -\vec u$

$\vec u \vec n = -1$ $\quad \vec u = \vec n$ idem idem

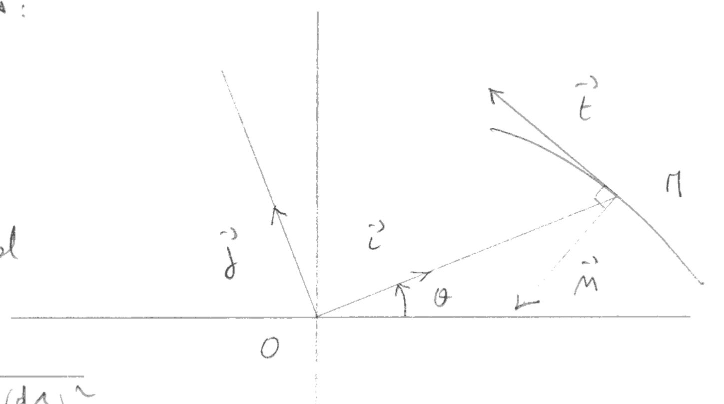
Remarque : on n'a pas besoin du vecteur tangent ni de savoir si $\vec n$ est orienté vers l'extérieur ou l'intérieur.

4) Calcul de $\vec n$ vecteur normal en un point de la courbe.

a) On se place en polaires :

$\vec{OM} = r \vec i \quad \vec j = \frac{d\vec i}{d\theta}$

$\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\vec i + r \vec j$



$\vec i \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \vec j \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

donc un vecteur normal est :

$\left(r\vec i - \frac{dr}{d\theta}\vec j \right) \Big/ \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

la racine n'est jamais nulle puisque la courbe ne passe jamais par l'origine.

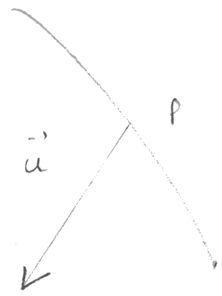
Le seul inconvénient est que la dérivée en polaire n'est pas particulièrement agréable à calculer.

b) On se place en cartésiennes : le vecteur $f'_x \; f'_y$ est normal à la courbe.
(CRC4 p 128)
On peut donc prendre comme vecteur $\vec{n}$:

$$\left(f'_x , f'_y\right) / \sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$$

$$\left| \begin{array}{l} f'_x = 4 a x^3 + 4 b x y^2 \\ f'_y = 4 b x^2 y + 4 y^3 / a \end{array} \right.$$

5) On se donne un point P sur la courbe et un vecteur $\vec{u}$ d'origine P. Comment déterminer si $\vec{u}$ est orienté vers l'intérieur ou vers l'extérieur?



On regarde la variation de f le long de $\vec{u}$

f vaut 0 sur la courbe

$f(0,0) = -1$

donc si f augmente au voisinage de P quand on s'éloigne dans le sens de $\vec{u}$ c'est que $\vec{u}$ est dirigé vers l'extérieur.

$P(x,y)$ $\quad \vec{u}(\alpha,\beta)$

Si $\frac{d}{d\lambda} f(x+\lambda\alpha, y+\lambda\beta)$ < 0 $\quad \vec{u}$ vers l'intérieur

$= 0$ $\quad$ tg

> 0 $\quad \vec{u}$ vers l'extérieur

$$\frac{df}{d\lambda} = f'_x \frac{dx}{d\lambda} + f'_y \frac{dy}{d\lambda} = f'_x \alpha + f'_y \beta = \vec{n}\cdot\vec{u} \quad (\text{cf } 4)\, e1)$$

ce qui semble indiquer que $\vec{n}$ est toujours vers l'extérieur (pourquoi en est-il ainsi?)

$$a x^4 + 2 b x^2 y^2 + \frac{y^4}{a} - 1 = 0 \qquad a > 1 \qquad b > -1$$

$$\vec{M_1 M} = \lambda \, \vec{M_1 M_2}$$

$\times \; x_2, y_2$

$x_1, y_1 \; \times$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda (x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda (y_2 - y_1) \end{cases}$$

$$a \left[x_1 + \lambda (x_2 - x_1) \right]^4 + 2b \left[x_1 + \lambda (x_2 - x_1) \right]^2 \left[y_1 + \lambda (y_2 - y_1) \right]^2 + \frac{\left[y_1 + \lambda (y_2 - y_1) \right]^4}{a} - 1 = 0$$