On détermine les lignes de champ par leurs équations paramétriques

$$\begin{cases} x(s) \\ y(s) \end{cases}$$ s étant l'abscisse curviligne sur la ligne de champ

On connaît la vitesse par $\vec{u} = u_r \vec{u}_r + u_\theta \vec{u}_\theta$

$$\begin{cases} u_r = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta \\ u_\theta = -\frac{2c}{r} - \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\, \vec{u}_x + \sin\theta\, \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_y$$

$$\vec{u} = (u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta)\,\vec{u}_x + (u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta)\,\vec{u}_y$$

le vecteur unitaire défini par $\vec{u}$ est $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}}$

Un vecteur unitaire tangent à la ligne de champ est $\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$

On a donc
$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \varepsilon \frac{u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta}{\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}} \\ \frac{dy}{ds} = \varepsilon \frac{u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta}{\sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}} \end{cases}$$
avec $\varepsilon = \pm 1$

On a $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $r^2 = x^2 + y^2$

On remplace u_r, u_θ, $\cos\theta$, $\sin\theta$ par leurs expressions en fonction de x et y et on a alors les éq :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dy}{ds} = \varepsilon g(x,y) \end{cases}$$ solubles par RK4

On peut aussi tout faire en coordonnées polaires

On cherche les équations paramétriques en polaire :

$$\left|\begin{array}{l} \rho(s) \\ \theta(s) \end{array}\right. \qquad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{d\rho}{ds} \\ \rho \frac{d\theta}{ds} \end{pmatrix}$ est tg à la courbe et unitaire, on a donc :

$$\frac{d\rho}{ds}$$

Effet Magnus

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{r})$

Equations paramétriques des lignes de champ $\begin{vmatrix} x(s) \\ y(s) \end{vmatrix}$ s. abscisse curviligne

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\varepsilon V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

$$\varepsilon = \pm 1 \qquad ds = v\,dt$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\varepsilon V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

$$dx = \varepsilon V_x\,dt$$

$$dy = \varepsilon V_y\,dt$$

En polaires ù champ des vitesses.

$$\vec{u} = u_\rho \vec{e_\rho} + u_\theta \vec{e_\theta}$$

Vecteur tangent $\frac{d\rho}{d\theta}\vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\theta}$ $\qquad \frac{d\vec{OM}}{ds}$ vecteur unitaire tg

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\frac{d\,\rho\vec{e_\rho}}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} + \rho\frac{d\theta}{ds}\vec{e_\theta}$$

$$\left|\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + u_\theta^2}} \\ \rho\frac{d\theta}{ds} &= \frac{u_\theta}{\sqrt{u_\rho^2 + u_\theta^2}} \end{aligned}\right)$$

à résoudre par Runge Kutta

avec $u_\rho = \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\theta$

$$u_\theta = -\frac{2C}{\rho} - \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta$$

$\cancel{\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{ds}}$ On $ds = v\,dt$ donc

$$\frac{d\rho}{dt} = u_\rho$$

$$\frac{d\theta}{dt} = u_\theta/\rho$$

Effet Magnus (2)

En cartésiennes :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = V_x$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \qquad \frac{dy}{dt} = V_y$$

$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_r = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j}$$

$$V_x = \vec{V} \cdot \vec{i} = V_r$$