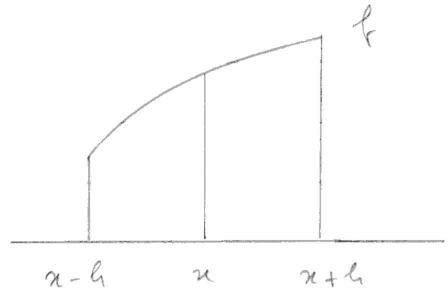
EQUATION DE LA CHALEUR

(cf Nougier page 237)



Approximation de la dérivée première :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots$$

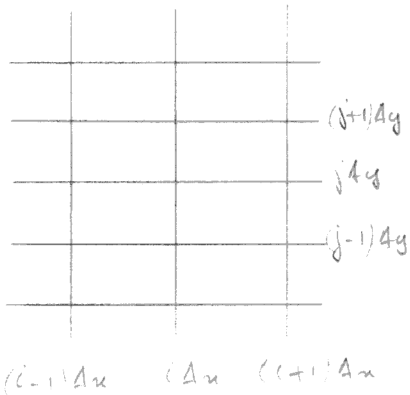
$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{et} \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Si f est une fonction de plusieurs variables ces formules s'appliquent aux dérivées partielles

On considère la fonction de deux variables $f(x, y)$



aux points $\left. \begin{array}{l} x_i = i\,\Delta x \\ y_j = j\,\Delta y \end{array} \right| \; i, j \in \mathbb{Z}$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i\Delta x,\, j\Delta y}$ noté $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}$

$f(i\Delta x, j\Delta y)$ noté $f_{i,j}$

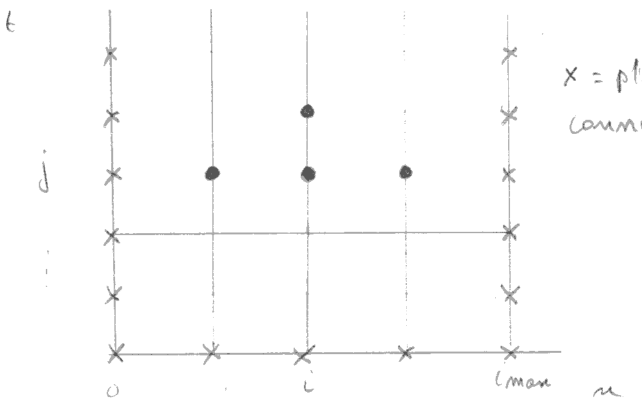
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2 f_{ij} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$$

et analogue pour y

Application à l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ en utilisant l'approx

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \, \frac{T_{i+1,j} - 2 T_{ij} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$



On se donne comme conditions aux limites :

$T_{i,0}$ $\quad 0 \le i \le i_{max}$ = température de la barre à $t = 0$

$T_{0,j}$ et $T_{i_{max},j}$ $\quad \forall j \ge 0$ = températures des extrémités en fonction de t

On pose $\dfrac{\Delta t\, \alpha}{(\Delta x)^2} = \mu$

$$\boxed{T_{i,j+1} - T_{i,j} = \mu\left(T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}\right)}$$

relation à quatre points (cf schéma précédent)

1) Méthode explicite.

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \mu\left(T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}\right)$$

1 pt inconnu 3 pts connus

C'est la méthode la plus simple mais elle n'est stable que si $\mu \leq 1$

il faut donc choisir μ en conséquence.

2) Méthode implicite

Au lieu d'approcher la dérivée $\left.\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j}$ par $\dfrac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}$ on

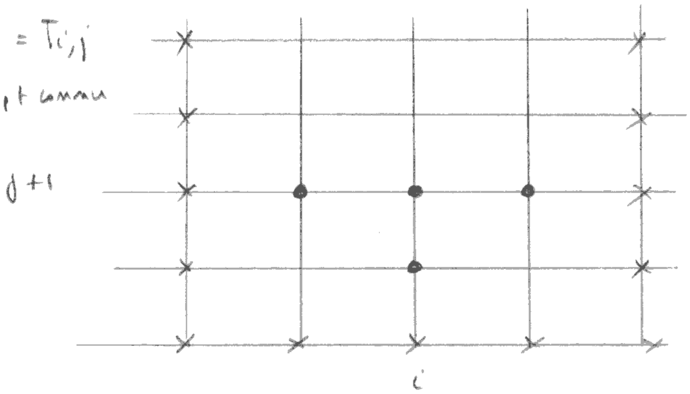
l'approche par $\dfrac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t}$ ce qui donne, en écrivant l'équation

précédente pour $j = j+1$

$$T_{i,j+1} - T_{i,j} = \mu\left(T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}\right)$$

$$-\mu\left(T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}\right) + T_{i,j+1} = T_{i,j}$$

3 pts inconnus 1 pt connu



<=> résolution d'un système

tri-diagonal : méthode de Choleski.

pour chaque valeur de j

(cf Nougier page 29)

cf détail de la méthode implicite page 3.

Méthode implicite, suite de la page 2

$$T_{i+1,j+1} - \left(2+\frac{1}{\mu}\right) T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1} = -\frac{1}{\mu} T_{ij}$$

$$\gamma = -\left(2+\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\delta = -\frac{1}{\mu}$$

$$T_{i+1,j+1} + \gamma T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1} = \delta T_{ij}$$

connu

$j=0$

$$T_{2,1} + \gamma T_{1,1} + T_{0,1} = \delta T_{1,0}$$

$$T_{3,1} + \gamma T_{2,1} + T_{1,1} = \delta T_{2,0}$$

- - - - - - - -

$$T_{imax,1} + \gamma T_{imax-1,1} + T_{imax-2,1} = \delta T_{imax-1,0}$$

connu

On réécrit pour j qqc et en inversant l'ordre de i :

connu

$$T_{0,j+1} + \gamma T_{1,j+1} + T_{2,j+1} = \delta T_{1j} + \ldots$$

$$T_{1,j+1} + \gamma T_{2,j+1} + T_{3,j+1} = \delta T_{2j}$$

- - - - - -

$$T_{imax-3,j+1} + \gamma T_{imax-2,j+1} + T_{imax-1,j+1} = \delta T_{imax-2\,j}$$

$$T_{imax-2,j+1} + \gamma T_{imax-1,j+1} + T_{imax,j+1} = \delta T_{imax-1,j} + \ldots$$

$imax-1$ équations

connu

$imax-1$ inconnues : $T_{1,j+1} \ldots T_{imax-1,j+1}$

$$M\, T^{j+1} = T^{j} \quad \text{avec} \quad T^{j+1} = \begin{pmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ \vdots \\ T_{imax-1,j+1} \end{pmatrix}$$

$$T^{j} = \begin{pmatrix} \delta T_{1j} - T_{0,j+1} \\ \delta T_{2j} \\ \vdots \\ \delta T_{imax-2,j} \\ \delta T_{imax-1,j} - T_{imax,j+1} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Valeurs numériques

$\ell = 1\,m \qquad \Delta x = 10^{-2}\,m \qquad \alpha = 10^{-4}\,m^2\,s^{-1}$ (alu)

$\Rightarrow \Delta t \leq \dfrac{10^{-4}}{10^{-4}} = 1\,s$

Extrait de Olivier Gié (p 386)

Notations : OG moi
$K \quad \alpha$
$\mu \quad \rho$

$j = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$

densité de courant de chaleur

$\lambda = 400\ W\ m^{-1}\ {}^\circ K^{-1}$ cuivre
1 verre
0.6 eau

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

α = diffusivité thermique en $m^2 s^{-1}$ [$\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ où ρ = mass vol et c = capacité calorifique spécifique)

$\alpha = \dfrac{\overbrace{W\,m^{-1}\,K^{-1}}^{\leftarrow \lambda}}{\underbrace{kg\,m^{-3}}_{\rho}\ \underbrace{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}_{c}} = m^2\,s^{-1}$]

$\alpha = 10^{-4}\ m^2\,s^{-1}$ pour l'aluminium.

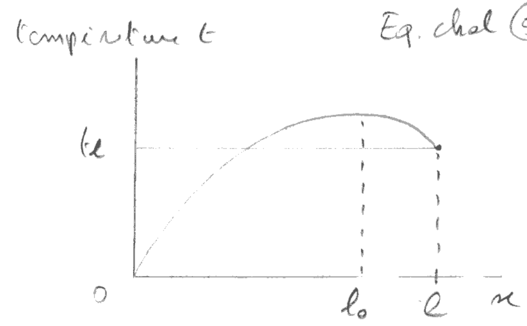
Temps caractéristique : $\tau = \dfrac{L^2}{\alpha}$ (cf Olivier Gié p. 387)

Δt doit être $\ll \tau = \dfrac{(\Delta x)^2}{\alpha} \Rightarrow \dfrac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2} \ll 1$, on rejoint le critère de convergence numérique.

- Condition initiales

On choisit une répartition parabolique de la température à l'instant 0 :

$$t = ax^2 + bx + c$$

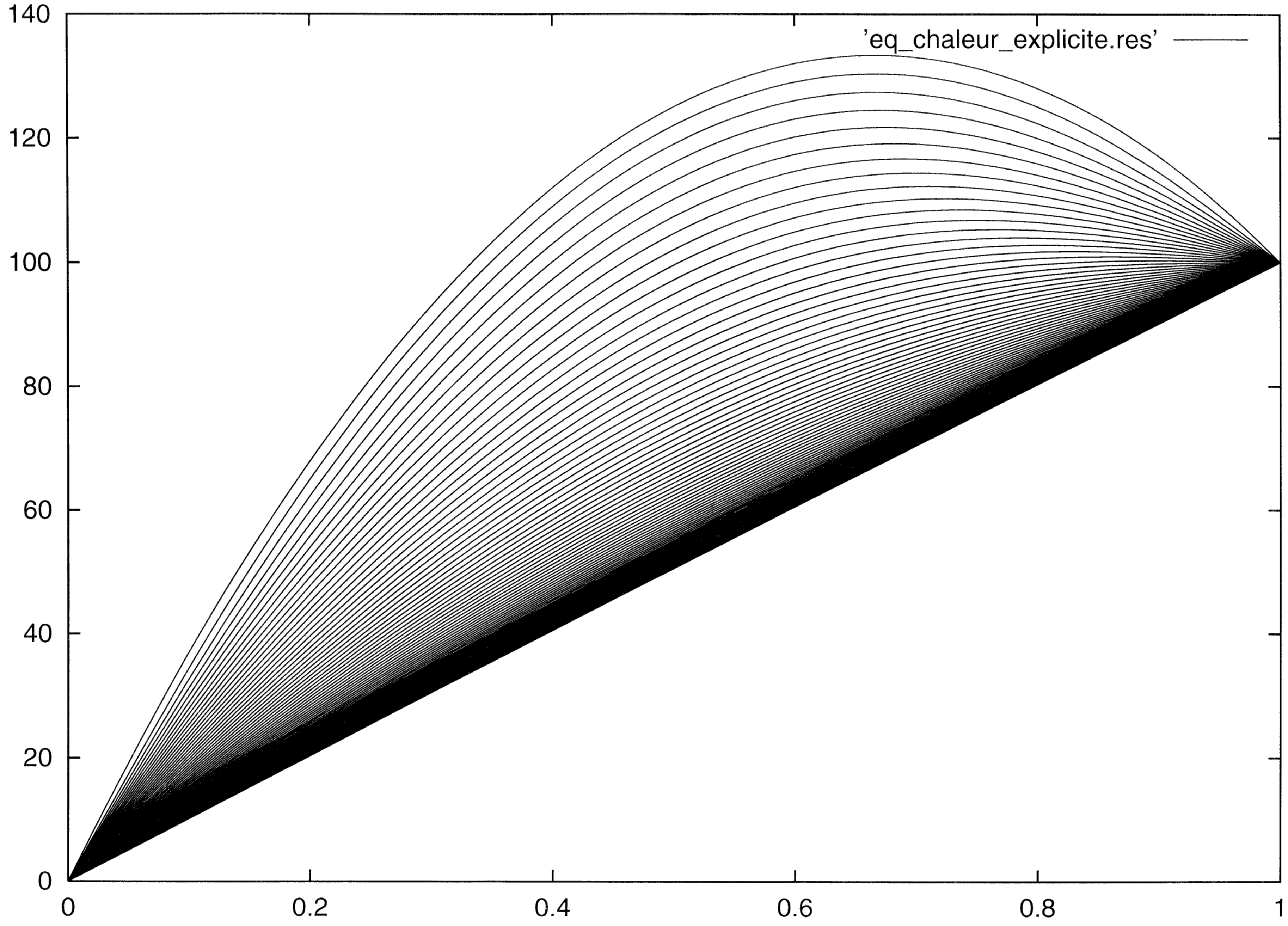


On impose que :

- la parabole passe par 0 $\Rightarrow c = 0$
- la dérivée s'annule en l_0 $\Rightarrow 2al_0 + b = 0 \Rightarrow b = -2al_0$
- elle passe par l, te : $al^2 + bl = te$ $\quad a(l^2 - 2ll_0) = te$

$\Delta x = l/(I-1)$ $\quad I$ = nb de val. de X $\qquad a = \dfrac{te}{l(l-2l_0)}$

$t[i] = ax^2 + bx$ avec $x = i\,\Delta x$



'eq_chaleur_explicite.res'
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1