et l'expression (119) pour la variance devient

$$\sigma_{a_1}^2 = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}. \tag{121}$$

Si toutes les erreurs sont les mêmes, $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = \sigma$, nous retrouvons nos formules pour la moyenne (39) et pour la variance (41) :

$$a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\text{exp}}\,, \qquad \sigma_{a_1}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Fonction linéaire

$$y = a_1 + a_2 x,$$

la matrice $\mathcal{F}$ prend la forme :

$$\mathcal{F} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & x_1/\sigma_1 \\ 1/\sigma_2 & x_2/\sigma_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1/\sigma_n & x_n/\sigma_n \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 1/\sigma_2 & \ldots & 1/\sigma_n \\ x_1/\sigma_1 & x_2/\sigma_2 & \ldots & x_n/\sigma_n \end{pmatrix},$$

la matrice $(\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\mathcal{F})$ est une matrice (2×2)

$$(\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i/\sigma_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i/\sigma_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2/\sigma_i^2 \end{pmatrix}$$

et

$$(\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i^{\text{exp}}/\sigma_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i^{\text{exp}} \cdot x_i/\sigma_i^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse de $(\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\mathcal{F})$ qui est aussi la matrice de covariance (119) s'écrit

$$D(\mathcal{A}) = (\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\mathcal{F})^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2/\sigma_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} x_i/\sigma_i^2 \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i/\sigma_i^2 & \sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2 \end{pmatrix},$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2.$$

Les expressions (117) donnent

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{\mathrm{exp}}}{\sigma_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{\mathrm{exp}}x_i}{\sigma_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right\},$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{\mathrm{exp}}x_i}{\sigma_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{\mathrm{exp}}}{\sigma_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right\}. \tag{122}$$

Les éléments $D(\mathcal{A})_{11}$ et $D(\mathcal{A})_{22}$ de la matrice de covariance définissent l'incertitude sur a_1 et sur a_2

$$\Delta a_1^2 = \sigma_{a_1}^2 = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2},$$

$$\Delta a_2^2 = \sigma_{a_2}^2 = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}. \tag{123}$$

Dans le cas général, l'élément $D(\mathcal{A})_{12}$ est différent de 0, ce qui signifie que les deux paramètres a_1 et a_2 sont corrélés :

$$\mathrm{cov}(a_1, a_2) \quad = \quad -\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i^2}. \tag{124}$$

Remarque très importante. Supposons que toutes les valeurs $\{y_i^{\mathrm{exp}}\}$ soient distribuées selon une loi normale. Les conditions de minimisation (115) ou (117) fixent k relations entre les $\{y_i^{\mathrm{exp}}\}$. Ainsi, la somme R_{min} où nous avons remplacé les $\{a_j\}$ par leurs valeurs venant de la minimisation (117) a une distribution χ^2 avec $(n-k)$ degrés de liberté, conformément à la formule (80). Pour les $\{y_i^{\mathrm{exp}}\}$ distribuées selon une loi normale, la notation standard de cette somme est χ^2 : $R_{min} \equiv \chi^2_{min}$. Rappelons que la valeur moyenne de χ^2_{min} selon (72) est

$$\overline{\chi^2_{min}} = n - k, \tag{125}$$

alors que son erreur est selon (73)

$$\Delta\chi^2_{min} = \sqrt{D(\chi^2_{min})} = \sqrt{2(n-k)}. \tag{126}$$

Autrement dit, si tous nos calculs sont corrects et cohérents et si toutes nos hypothèses sont vérifiées, nous devons obtenir pour la somme de carrés R^{exp}_{min} une valeur proche de $(n-k)$.

3.5.2. FONCTION LINÉAIRE

Sur la figure 3.2, nous avons présenté un exemple de données expérimentales (10 points) pour lesquelles nous voulons ajuster une droite $y = a_1 + a_2x$. Les valeurs numériques correspondantes sont réunies dans le tableau 3.2.