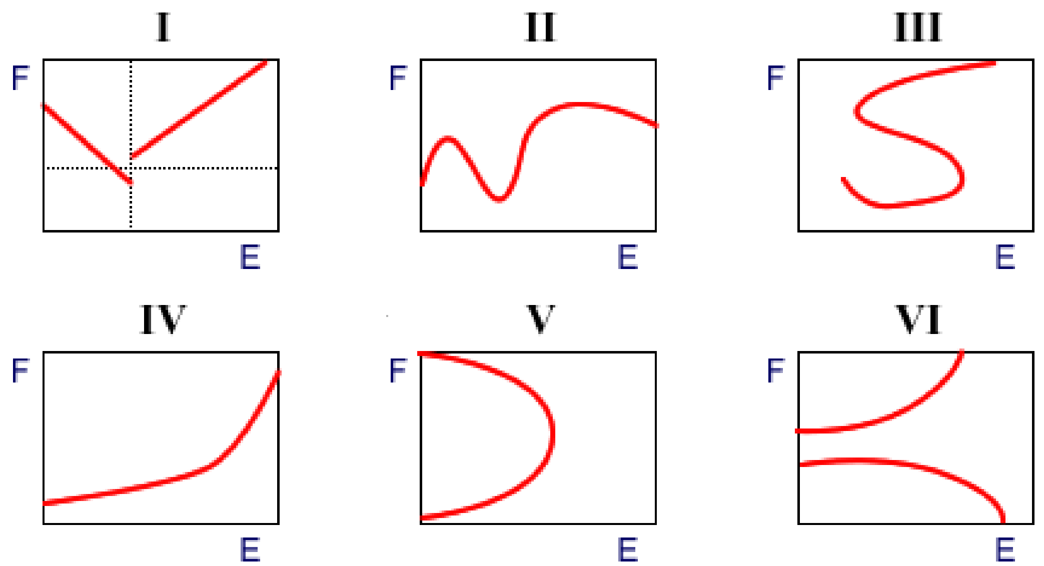
Leçon 01- Correction des exercices

Exercice 1

E x F est représenté par un rectangle, chaque côté représentant l'un des deux ensembles. Parmi les relations représentées ci-dessous lesquelles sont des fonctions de E dans F ? Lesquelles sont des fonctions de F dans E ? Indiquer leur domaine de définition. Parmi ces fonctions, lesquelles sont injectives ? Lesquelles sont surjectives ?



Solution

I , II, IV sont des fonctions de E dans F (un élément de E a au plus un correspondant dans F)
III, V et VI ne sont pas des fonctions, (certains éléments de E ont plusieurs correspondants dans F).
IV, V et VI sont des fonctions de F dans E (un élément de F a au plus un correspondant dans E)
I, II et III ne sont pas des fonctions de F dans E, (certains éléments de F ont plusieurs correspondants dans E).
Seules les fonctions de E vers F et de F vers E du dessin IV sont injectives. Les autres fonctions ne sont pas injectives (certains éléments ont plusieurs correspondants)
La seule fonction surjective est la fonction du dessin IV de F dans E

Exercice 2 : Parmi les relations suivantes, lesquelles définissent des fonctions, des applications, lesquelles sont injectives? Si la relation est une fonction, définir si possible l'ensemble d'arrivée pour que la fonction soit une surjection.

R_1 : à un étudiant « e » de l'université X, on fait correspondre l'année « a » dans laquelle il est inscrit. $R_1 : e \rightarrow a$.

R_2 : à un étudiant « e » de l'université X, on fait correspondre ses diplômes « d ».
R_2 : e$\rightarrow$d.

R_3 : à un employé « e » de l'entreprise Y, on associe son supérieur hiérarchique direct. « s ». R_3 : e$\rightarrow$s.

R_4 : à un employé « e » de l'entreprise Y, on associe le nombre « n » d'enfants de « e ».
R_4 : e$\rightarrow$n.

Solution

Pour R_1 : Dans certaine université un étudiant peut s'inscrire dans deux années différentes(en Deug1 d'Anglais et en Deug1 d'Economie par exemple), mais c'est très rare. Supposons donc que dans l'université X ce ne soit pas possible. R_1 est alors une fonction, c'est même une application puisque si « e » est un étudiant de l'université X, « e » est inscrit dans une année. Une année contient plus d'un étudiant ! Cette application n'est pas injective. Si l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des cursus proposés par l'université X, R_1 est surjective.

Pour R_2 : Un étudiant « e » peut avoir plusieurs diplômes de l'université X, par exemple un DEUG et une Maîtrise. R_2 n'est donc pas une fonction. A fortiori ce n'est pas une application.

Pour R_3 : Chaque employé à un seul supérieur hiérarchique, mais le patron n'en a pas.
R_3 est donc une fonction mais pas une application. Elle n'est donc pas injective ou surjective.

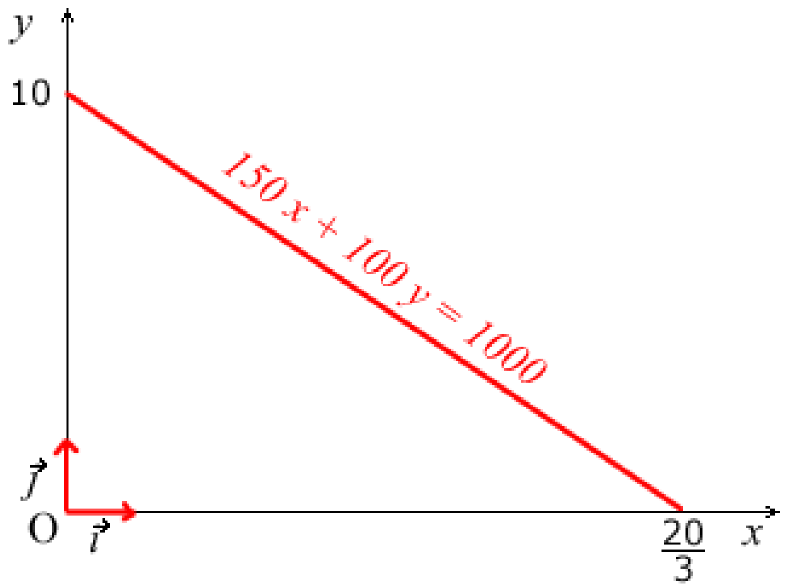
Pour R_4 : A chaque employé « e », on fait correspondre un et un seul entier « n » égal au nombre de ses enfants. R_4 est donc une fonction et même une application. Par contre il est très probable que R_4 ne soit pas injective, puisqu'il y beaucoup de chance qu'au moins deux employés aient le même nombre d'enfants. Si l'ensemble d'arrivée est constitué de tous les entiers correspondant aux nombres d'enfants des employés de l'entreprise, R_4 est une surjection.

Exercice 3 (droite de budget)

Un individu dispose de 1000 F, il peut acheter 2 biens de prix respectif p_1 et p_2. Soit x la quantité achetée du premier bien et y la quantité achetée du second bien.
1) Quelle relation lie x et y si l'individu consomme tout son budget?
2) y est-il fonction de x? x est-il fonction de y? Si oui de quelles fonctions s'agit-il?
3) Représenter les graphes correspondants (cas particulier, p_1=150F, p_2=100F):

Solution

1) xp_1 représente le coût de l'achat de x unités de bien 1 et yp_2 le coût d'achat de y unités de bien 2. On a donc $xp_1 + yp_2 = 1000$
2) $xp_1 + yp_2 = 1000 \Leftrightarrow y = -(p_1/p_2)x + 1000/p_2$, y est donc fonction de x et le graphe de cette fonction est une droite.
   De même $xp_1+yp_2 = 1000 \Leftrightarrow x=-(p_2/p_1)x+1000/p_1$, x est donc fonction de y et le graphe de cette fonction est une droite.
3)



Exercice 4

Soient les fonctions de **N** dans **N** définies par les tables suivantes:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	2	4	1	3	5	9	10	6	7	8	16	13	15	14	11	12	18	17

x	1	2	3		5	6	7	8	9	10		12	13	14	15	16	17	18
g(x)	2	1	4	1	11	10	17	0	3	6	1	5	9	11	2	4	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h(x)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

a) Indiquer leur domaine de définition.
b) Parmi ces fonctions lesquelles sont injectives?
c) Pour chacune de ces fonctions indiquer comment doit être défini le domaine d'arrivée pour que la fonction soit surjective.
d) Lesquelles de ces fonctions admettent une fonction réciproque? la définir.
e) Définir $f_\circ g$, $g_\circ f$, $f_\circ h$, $h_\circ f$, $h_\circ f_\circ g$ et préciser pour chaque fonction son domaine de définition.

Solution

a) f, g et h sont définis sur **E** = {1 ; 2 ; …. ; 17 ; 18}.

b) f est injective car il n'existe pas deux éléments distincts de **E** ayant la même image
g n'est pas injective car f(4)=f(11)
h n'est pas injective car f(1)=f(2).

c) f(**E**)=**E**
g(**E**)={0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11 ; 17}
h(**E**)={10}.

d) f admet une inverse (lire le tableau à l'envers). Les autres ne sont pas injectives.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f^{-1}(x)$	3	1	4	2	5	8	9	10	6	7	15	16	12	14	13	11	18	17

e)fog

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
g(x)	2	1	4	1	11	10	17	0	3	6	1	5	9	11	2	4	1	2
f(g(x))	4	2	3	2	16	8	18	non def	4	8	3	5	6	15	1	2	3	1

gof

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	2	4	1	3	5	9	10	6	7	8	16	13	15	14	11	12	18	17
g(f(x)	1	1	2	4	11	3	6	10	17	0	4	9	2	11	1	5	2	1

foh : $\forall x$, f(h(x)) = f(10) = 8
$\forall x$, hof(x) = 10
hofog non définie pour x = 8 égal à 10 ailleurs

Exercice 5

Voici 4 fonctions de **R** dans **R**.
a) Indiquer leur domaine de définition.
b) Quelles sont celles qui sont injectives? celles qui sont surjectives? celles qui sont bijectives?
c) Comment peut-on les rendre bijectives?

$f(x) = x^2 - 4$

$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$h(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Solution

Pour f :
a) f est définie quelque soit x, on a donc D(f) **= R**
b) On remarque que f(1) = f(-1), f n'est donc pas injective car deux élément distincts (1 et –1) ont la même image .
f n'est pas surjective car les nombres inférieurs à -4 ne sont pas atteints(pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geq 0$ et $x^2 - 4 \geq -4$).
f n'étant ni injective, ni surjective f n'est pas bijective.
c) Pour que la fonction soit bijective il faut que l'équation f(x) = y ait une et une seule solution quelque soit y.
$x^2 - 4 = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+4}$. Il faut donc $y + 4 \geq 0$ et que x ne prenne qu'une seule valeur, la positive par exemple.

La restriction de f à l'ensemble de départ [-4 ; +∞[et à l'ensemble d'arrivée R^+ est alors une bijection.

Pour g :

a) g(x) est défini pour tout $x\neq -1$donc D(g) = R\{-1}.

b) Etudions les solutions de l'équation $y = \dfrac{1}{x+1}$ où pour y donné, on cherche x.

$y = \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1-y}{y}$. Pour tout $y \neq 0$, on trouve un et un seul x.

g est donc injective (un y n'a qu'un seul antécédent), mais elle n'est pas surjective (0 n'est pas atteint).

g n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

c) La restriction de g à l'ensemble de départ Dg = R\{-1}. et à l'ensemble d'arrivée R\{0}. Est bien une bijection.

Pour h : (éléments de réponse)

a)D(h) = **R**

b)h n'est ni injective ni surjective ni bijective

c)La restriction de h à l'ensemble de départ $\mathbf{R}^+$ et à l'ensemble d'arrivée [$\sqrt{3}$; +∞[est une bijection.

Exercice 6

Q désigne une quantité produite, K le capital mobilisé et L le travail utilisé.

La fonction de production est définie par $Q = f(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}$

1) On considère Q comme fonction de la seule variable K, (L étant considéré comme un paramètre fixé).

Quelle est sa fonction réciproque. (Comment le capital varie-t-il en fonction de la production ?)

2) On considère Q comme fonction de la seule variable L, (K étant considéré comme un paramètre fixé).

Quelle est sa fonction réciproque.(Comment le travail varie-t-il en fonction de la production ?)

Solution

Eléments de réponse

1) $Q = K^{1/2}L^{1/4} = g(K)$, L est alors un paramètre. On a $K^{1/2} = Q/L^{1/4}$ et $K = Q^2L^{-1/2}$. Donc $K = g^{-1}(Q) = Q^2L^{-1/2}$.

2) Q = h(L) avec K paramètre. On a donc $L = h^{-1}(Q) = Q^4K^{-2}$.

Exercice 7 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1) $x \to \dfrac{x^2+2}{2x^2-3x+1}$	2) $x \to \sqrt{2x^2-3x+1}$	3) $x \to \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}$
4) $x \to \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}}$	5) $x \to \ln\dfrac{2x^2-3x+1}{2-x}$	6) $x \to (2x-1)^m$ $m\in\mathbf{Z}$

7) $x \to x^x$.

Solution

1) Une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est définie si et seulement si son dénominateur est non nul. Donc $f : x \to \dfrac{x^2 + 2}{2x^2 - 3x + 1}$ est définie pour les réels x tels que $2x^2 - 3x + 1 \neq 0$. Or $2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$, et $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2} ; 1\}$.

2) Un radical est défini si et seulement si l'expression qui se trouve sous le radical est définie et positive ou nulle. Et si $f : x \to \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$, f est définie pour les réels x tels que $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$. Or $2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$, donc $D(f) =]-\infty ; \frac{1}{2}] \cup [1 ; +\infty[$.

3) Si $f : x \to \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 1}}$, f est définie si et seulement si $\dfrac{2x - 1}{x + 1}$ est définie et positive.

Or $\dfrac{2x - 1}{x + 1}$ a le même signe que $(2x - 1)(x + 1)$ et est définie pour $x \neq -1$.

D'où $D(f) =]-\infty ; -1[\cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$.

4) Si $f : x \to \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$, f est définie si et seulement si $2x - 1 \geq 0$ et $x + 1 > 0$.

D'où $D(f) = [\frac{1}{2} ; +\infty[$.

5) $x \to \ln x$ est définie sur $]0 ; +\infty[$, donc si $f : x \to \ln \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2 - x}$, f est définie pour les réels x tels que $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2 - x}$ est définie et strictement positive.

Soit $x \neq 2$ et $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2 - x} > 0$. Pour éviter de se tromper, on peut faire un tableau :

x	$-\infty$ -1/2	1	2	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$	+	-	+	+
$2 - x$	+	+	+	-
$\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2 - x}$	+	-	+	-

D'où $D(f) =]-\infty ; \frac{1}{2} [\cup]1 ; 2[$.

6) Si m = 0, pour $x \neq \frac{1}{2}$ $(2x - 1)^m = 1$, et $(2x - 1)^m$ n'est pas défini si x = 0.

Donc si $f : x \to (2x - 1)^m$, $D(f) = \mathbf{R}^*$.

Si m > 0, f est définie sur $\mathbf{R}$.

Si m < 0, -m > 0 et $f(x) = \dfrac{1}{(2x - 1)^m}$ et f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

7) Par définition $x^x = \exp(x\ln x)$. $x \to \exp x$ est définie sur **R** et $x \to \ln x$ est définie sur $]0 ; +\infty[$. Donc si $f : x \to x^x$, $D(f) =]0 ; +\infty[$.

Exercice 8 : Soit f la fonction de **R** dans **R** définie par $f(x) = 2|x - 1| + |2x + 1| - |x|$.

1) Calculer $f(0)$, $f(-\frac{2}{3})$ et $f(\frac{4}{3})$. f est-elle injective ?

2) Exprimer $f(x)$ sans les valeurs absolues suivant les valeurs de x (on rappelle que $|A(x)| = A(x)$ si $A(x) \geq 0$ et $|A(x)| = -A(x)$ si $A(x) \leq 0$). On pourra établir les résultats à l'aide d'un tableau.

3) Faire une représentation graphique de f.

4) Déterminer Im(f). Trouver le ou les antécédents de 5. f est-elle surjective ?

5) Déterminer **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** dans **B**. Déterminer alors f^{-1}.

Solution

1) $f(0) = 2|-1| + |1| - |0| = 3$

$f(-\frac{2}{3}) = 2\,|-\frac{5}{3}| + |-\frac{1}{3}| - |-\frac{2}{3}| = 3$

$f(\frac{4}{3}) = 2\,|\frac{1}{3}| + |\frac{11}{3}| - |\frac{4}{3}| = 3.$

0, $-\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{3}$ ont même image par f, f n'est donc pas injective.

2) $|x - 1| = x - 1$ si $x \geq 1$ et $|x - 1| = -x + 1$ si $x \leq 1$

$|2x + 1| = 2x + 1$ si $x \geq -\frac{1}{2}$ et $|2x + 1| = -2x - 1$ si $x \leq -\frac{1}{2}$

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = x$ si $x \leq 0$, d'où le tableau :

x	**-∞**	**-1/2**	**0**	**1**
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$
$\|2x + 1\|$	$-2x - 1$	$2x + 1$	$2x + 1$	$2x + 1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x	x
$2\|x - 1\| + \|2x + 1\| - \|x\|$	$-3x + 1$	$x + 3$	$-x + 3$	$3x - 1$

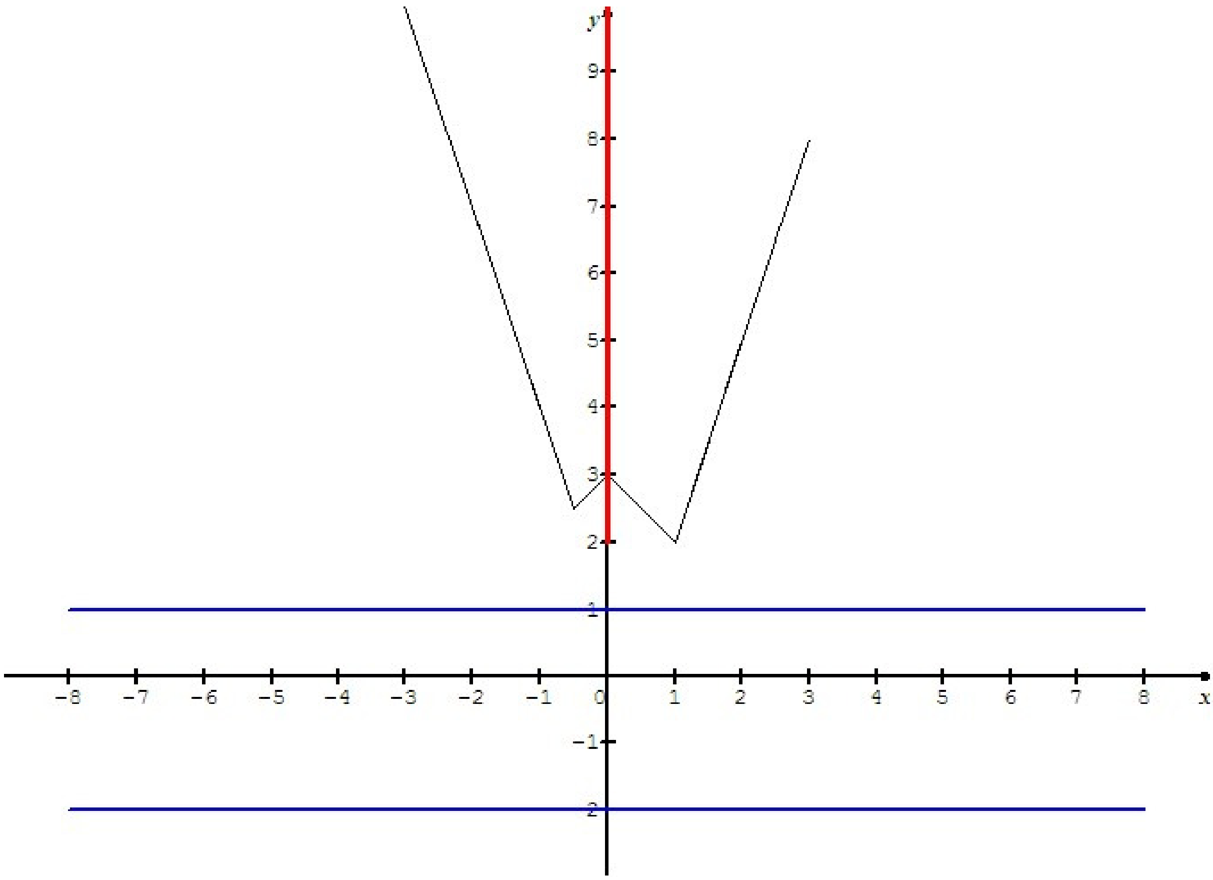
Sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$, $f(x) = -3x + 1$,

Sur $[-\frac{1}{2} ; 0]$, $f(x) = x + 3$;

Sur $[0 ; 1]$, $f(x) = -x + 3$,

Sur $[1 ; +\infty[$, $f(x) = 3x - 1$.

3)



4) En utilisant la représentation graphique de f, on constate que Im(f) = [2 ; +∞[(rougr sur le dessin) . D'autre part on remarque que 5 a deux antécédents $x_1 \in]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et $x_2 \in [1 ; +\infty[$.
Donc x_1 vérifie $-3x_1 + 1 = 5$, et $x_1 = -2$. De même x_2 vérifie $3x_2 - 1 = 5$, soit $x_2 = 2$.
Les deux antécédents de 5 sont donc –2 et 2.

Toujours en utilisant la représentation graphique de f, on remarque que tout réel y de]-∞ ; 2[n'a pas d'antécédent (parallèle à (Ox) en bleu sur le dessin). f n'est donc pas surjective sur **R**.

5) En observant C(f), on peut affirmer que f est une bijection de **A** = $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ dans **B =** $[\frac{5}{2} ; +\infty[$ par exemple.

Si on choisit **A** = $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et **B =** $[\frac{5}{2} ; +\infty[$, f(x) = -3x + 1. Or si y = -3x + 1,
$x = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, d'où $f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ ou $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Si on choisit **A =** [1 ; +∞[et **B =** [2 ; +∞[, f(x) = 3x – 1, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

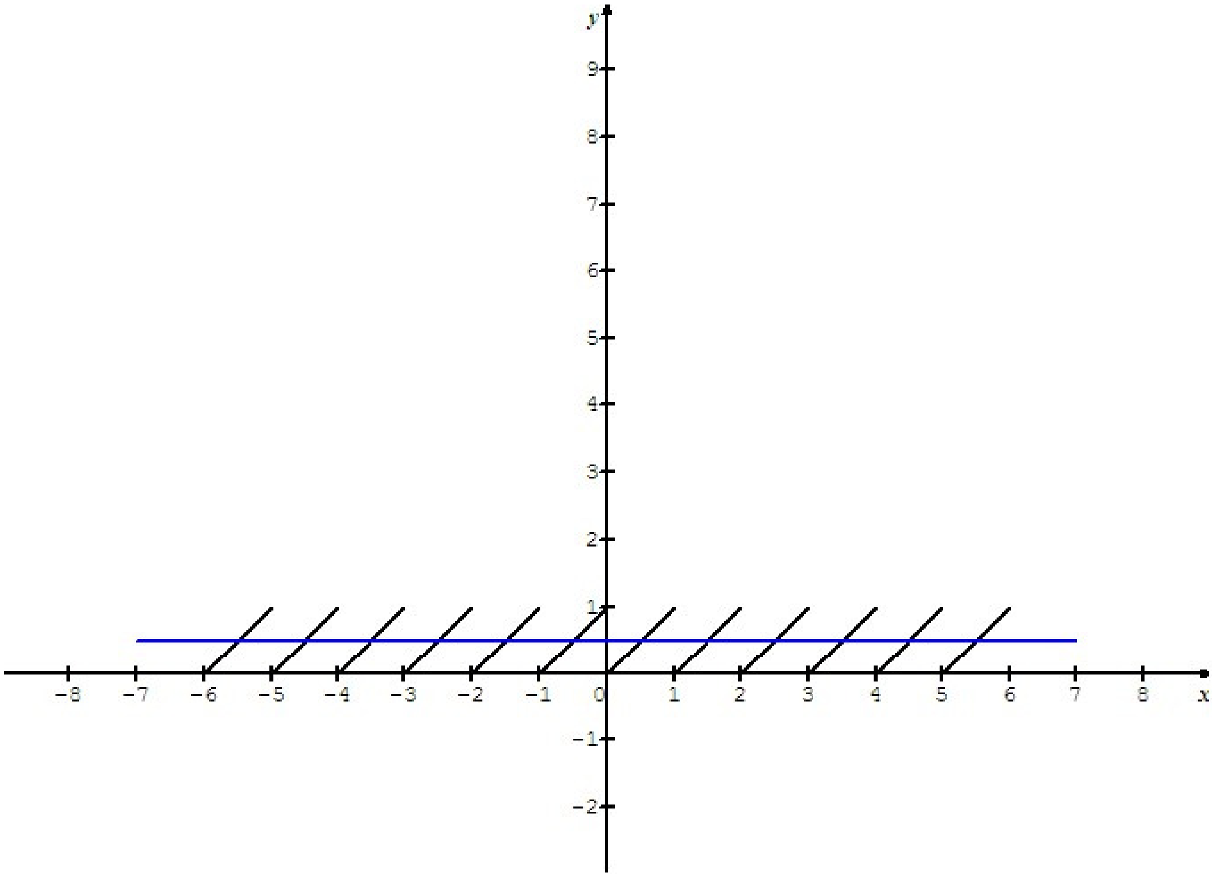
Si on choisit **A** = [0 ; 1] et **B** = [2 ; 3], f(x) = -x + 3 et $f^{-1}(x) = -x + 3$ …etc

Exercice 9 : Soit E(x) la partie entière de x, c'est à dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à x.
On a : E(x)∈**N** et E(x) ≤ x ≤ E(x) + 1.
1) Faire la représentation graphique des fonctions f et g définies par
f(x) = x – E(x) et g(x) = 2x – E(x-1)

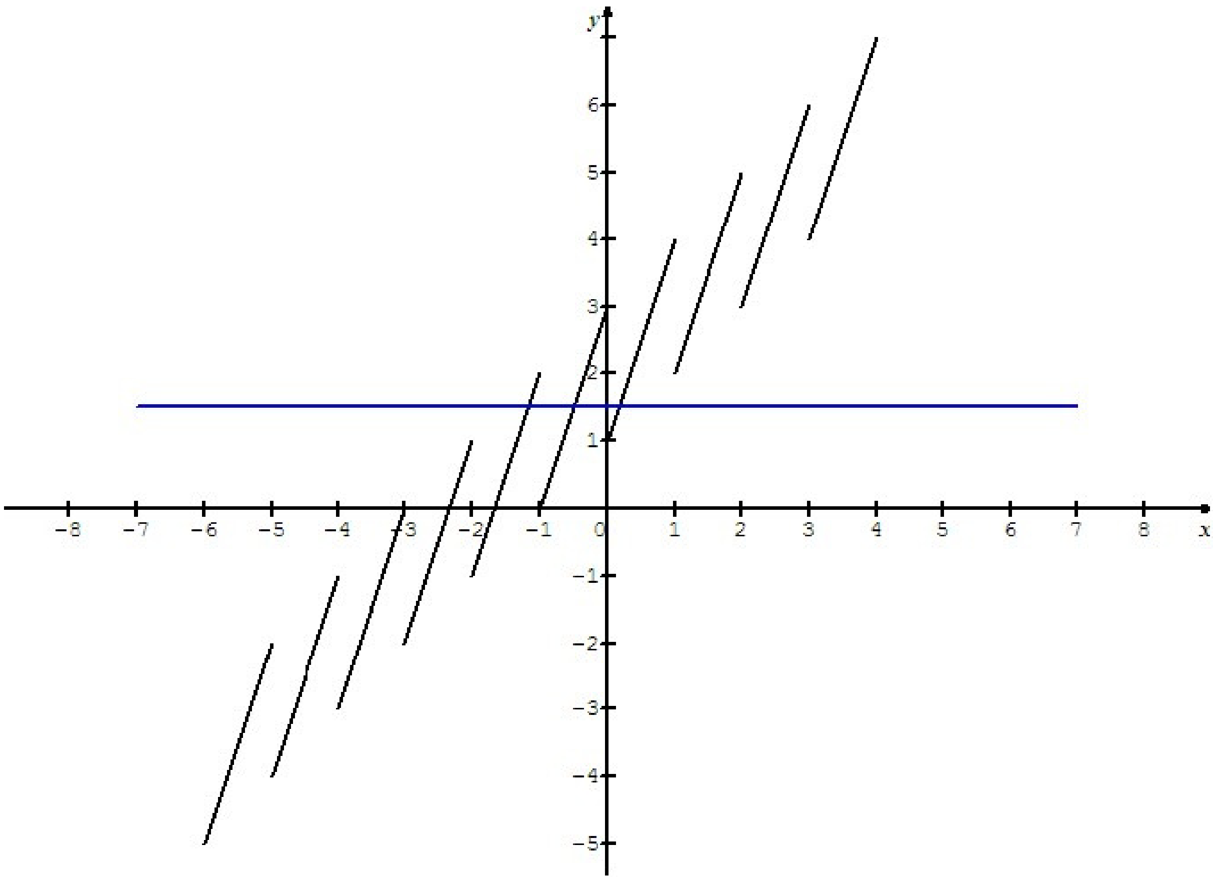
2) Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ?
3) Si non, pour chacune des fonctions, déterminer **A** et **B** telle que la fonction soit une bijection de **A** sur **B**.

Solution

1) Si $x \in [n ; n+1[$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $f(x) = x - n$, et sur $[n ; n+1[$ C(f) est un segment fermé à gauche et ouvert à droite, d'extrémités $A_n(n ; 0)$ et $B_n(n+1 ; 1)$.
On en déduit que sur $\mathbf{R}$, $0 \leq f(x) < 1$. D'où la représentation graphique :



Si $x \in [n ; n+1[$ avec $n \in \mathbf{Z}$, $g(x) = 2x - n + 1$, et sur $[n ; n+1[$ C(f) est un segment fermé à gauche et ouvert à droite, d'extrémités $C_n(n ; n+1)$ et $B_n(n+1 ; n+3)$.
On en déduit que sur $[n ; n+1[$, $n+1 \leq g(x) < n+3$. D'où la représentation graphique :



2) On a vu que $f(n) = 0$, tous les entiers ont même image 0, f n'est donc pas injective.
D'autre part $g(\frac{1}{2}) = g(1) = 2$ (plus généralement $g(n + \frac{1}{2}) = g(n + 1) = n + 2$), g n'est pas injective.
On peut aussi le voir graphiquement en remarquant que des droites horizontales coupent plusieurs fois les représentations de f et de g (parallèle à (Ox) en bleu sur les dessins).
On a vu dans la question précédente que $0 \leq f(x) < 1$, f n'est donc surjective sur **R**.
Par contre toute parallèle à l'axe des abscisses coupe C(g), g est donc surjective.

3) f est une bijection de **A** = [0 ; 1[dans **B** = [0 ; 1[par exemple (on peut prendre pour **A** tout intervalle de la forme [n ; n+1[).
g est une bijection de **A** = [0 ; 1[dans **B** = [1 ; 3[par exemple (on peut prendre pour **A** tout intervalle de la forme [n ; n+1[et pour **B**, [n+1 ; n+3[).

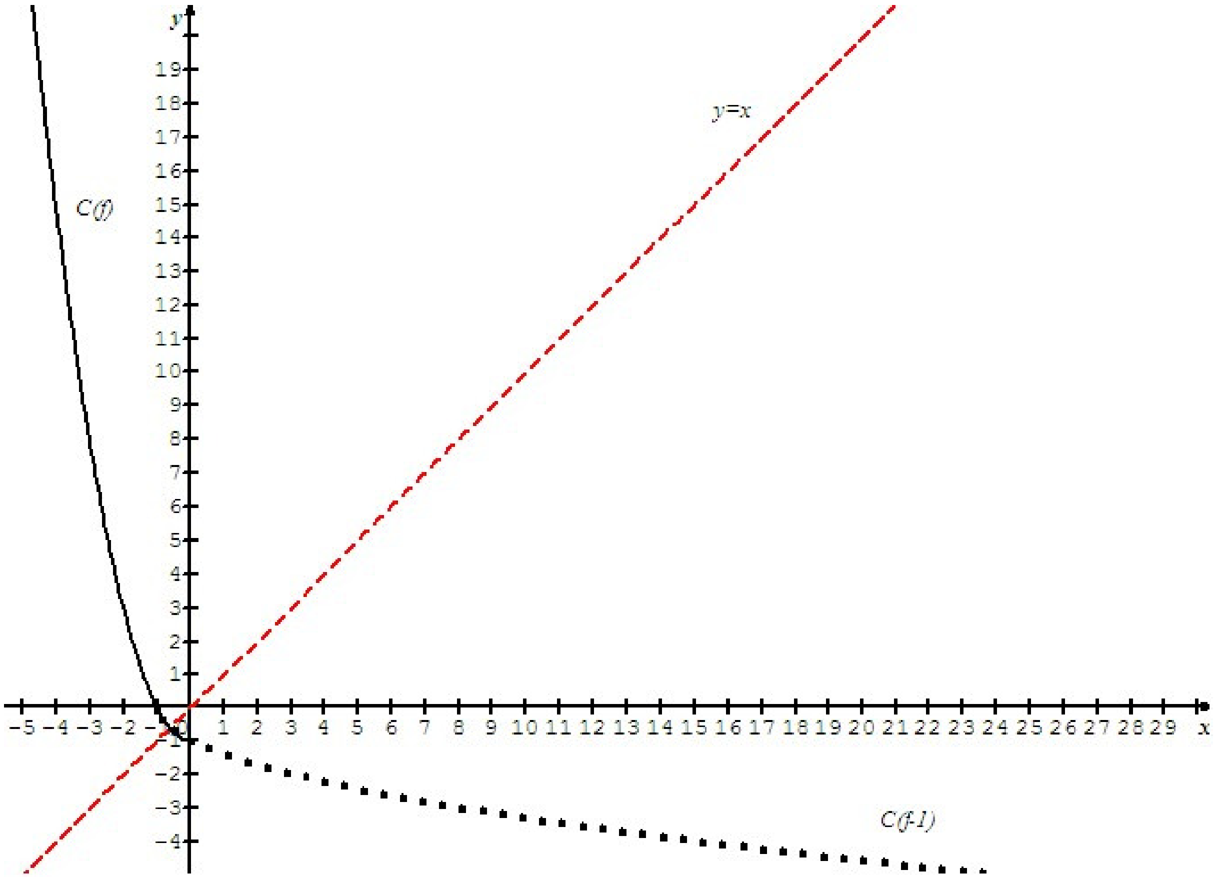
Exercice 10 : Soit f : [-5 ; 0] $\rightarrow$ **R**
$x \rightarrow x^2 - 1$.
1) f est-elle injective ? Surjective ?
2) Déterminer **B** tel que f soit une bijection de [-5 ; 0] dans **B**. Déterminer alors f^{-1}. Faire les représentations graphiques de f et f^{-1}.

Solution

1) $(f(x_1) = f(x_2)) \Leftrightarrow (x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1)$ soit $x_1^2 = x_2^2$. Or deux nombres négatifs (f est définie sur [-5 ; 0]) ayant même carré sont égaux. f est donc injective de [-5 ; 0] sur **R**.
Si $x \in [-5 ; 0]$, $f(x) \in [-1 ; 24]$, f n'est donc pas surjective de [-5 ; 0] sur **R**.

2) Par contre si **B** = [-1 ; 24] et si $y \in$ **B**, $y = x^2 - 1$ équivaut à $x^2 = y + 1$.

Or $y + 1 \in [0 ; 25]$ et $x = \pm\sqrt{y + 1}$ et puisque $x\in [-5 ; 0]$, $x = -\sqrt{y + 1}$ est la seule solution. f est donc bien une bijection de **A** = [-5 ; 0] dans **B** et $f^{-1}(y) = -\sqrt{y + 1}$ ou
$f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1}$.



Exercice 11 : Soit $f : x \to \dfrac{4}{x^2} + 1$. Déterminer **A** et **B** tels que f soit une bijection de **A** sur **B**. Déterminer alors f^{-1}.

Solution

Résolvons l'équation $y = \dfrac{4}{x^2} +1$ où y est un réel donné et x l'inconnue.
L'équation équivaut à $yx^2 = 4 + x^2$, soit $x^2(y - 1) = 4$. Si y = 1, il n'y a pas de solution (l'équation s'écrit 0 = 4) si $y\neq 1$, on a $x^2 = \dfrac{4}{y-1}$, ce qui n'est possible que si $y > 1$ (car $x^2 \geq 0$). Et si $y > 1$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{y-1}} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{y-1}}$ et il y a deux solutions opposées f n'est donc pas une bijection si $x\in \mathbf{R}^*$ ou si $y \leq 1$.
Par contre si $x\in \mathbf{R}^{+*}$ et si $y > 1$, l'équation n'a qu'une et une seule solution $x = \dfrac{2}{\sqrt{y-1}}$ et f est une bijection de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $]1,+\infty[$.
De plus f admet pour fonction réciproque f^{-1}, fonction de $]1 , +\infty[$ dans $\mathbf{R}^{+*}$:
$y\to f^{-1}(y) = \dfrac{2}{\sqrt{y-1}}$. On a aussi $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Exercice 12 : Montrer que si f est une bijection croissante (respectivement décroissante) de **A** sur **B**, f^{-1} est une bijection croissante (respectivement décroissante) de **B** sur **A**.

Solution

On peut le montrer en remarquant que si en repère orthonormée C(f) est la représentation graphique d'une fonction f croissante (resp. décroissante), son symétrique par rapport à la droite d'équation y = x est la représentation graphique d'une fonction croissante (resp. décroissante), or c'est celle de f^{-1}.

Montrons-le autrement.

Supposons que f soit une bijection croissante de l'intervalle **A** dans l'intervalle **B**, f^{-1} est une bijection de **B** dans **A**.

Soient x_1 et x_2 deux réels de **B** tels que $x_1 < x_2$.
Supposons que $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$. $f^{-1}(x_1)$ et $f^{-1}(x_2)$ appartiennent à **A** et puisque f est croissante sur **A**, $f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2))$, soit $x_1 \geq x_2$, et c'est impossible puisque $x_1 < x_2$. Donc nécessairement $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$ et f^{-1} est croissante de **B** dans **A**. On fait un raisonnement analogue si f est décroissante.

Exercice 13 : Déterminer gof et fog, ainsi que leur ensemble de définition, dans les deux cas suivants

1) $f : x \rightarrow \sqrt{x+1}$ $\qquad g : x \rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2) $f : x \rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad g : x \rightarrow \dfrac{2}{x}$

Solution

1) $D(f) = [-1 ; +\infty[$ et puisque $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, $D(g) =]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$.
Pour définir $gof(x) = g(f(x))$, il faut que $x \in D(f)$ et que $f(x) \in D(g)$.
Or pour $x \in D(f)$, $f(x) \in [0 ; +\infty[$, donc pour que $f(x) \in D(g)$, il faut que $f(x) \in [2 ; \infty[$, c'est à dire que $\sqrt{x+1} \geq 2$, soit $x + 1 \geq 4$ et $x \geq 3$. Si $x \in [3 ; +\infty[$, $x \in D(f)$, donc

$$D(gof) = [3 ; +\infty[.$$

Si $x \in [3 ; +\infty[$, $gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - \sqrt{x+1} - 2}$
$gof(x) = \sqrt{x - \sqrt{x+1} - 1}$

Pour définir $fog(x) = f(g(x))$, il faut que $x \in D(g)$ et que $g(x) \in D(f)$. Or si $x \in D(g)$, $g(x) \in [0 ; +\infty[\subset D(f)$. Donc $D(fog) = D(g) =]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$.
Si $x \in]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$, $fog(x) = f(\sqrt{x^2 - x - 2}) = \sqrt{\sqrt{x^2 - x - 2} + 1}$.

2) Remarquons que $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $D(g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Pour définir $gof(x) = g(f(x))$, il faut que $x \in D(f)$ et que $f(x) \in D(g)$.
Or pour $x \in D(f)$, $f(x) \neq 0$ si et seulement si $x \neq -1$. Donc $D(gof) = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, $g \circ f(x) = g(\frac{x+1}{x-1}) = \frac{2}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{2x-2}{x+1}$.

Pour définir $f \circ g(x) = f(g(x))$, il faut que $x \in D(g)$ et que $g(x) \in D(f)$.

Or si $x \in D(g)$, $g(x) = \frac{2}{x} \neq 1$ si et seulement si $x \neq 2$. D'où $D(f \circ g) = \mathbf{R} \setminus \{0 ; 2\}$.

Et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0 ; 1\}$, $f \circ g(x) = f(\frac{2}{x}) = \frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{2}{x}-1} = \frac{2+x}{2-x}$.

Exercice 14 : Soit $f\ x \to \frac{2x+1}{x-1}$, calculer $f^4(x) = f \circ f \circ f \circ f(x)$, ainsi que son ensemble de définition.

Solution

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $f^2(x) = f \circ f(x)$ est définie si $x \in D(f)$ et si $f(x) \in D(f)$. Donc et $f^2(x)$ est définie si $x \neq 1$ et si $\frac{2x+1}{x-1} \neq 1$ soit $2x + 1 \neq x - 1$, ou $x \neq -2$.

D'où $D(f^2) = \mathbf{R} \setminus \{-2 ; 1\}$et $f^2(x) = f(f(x)) = f(\frac{2x+1}{x-1}) = \frac{2(\frac{2x+1}{x-1})+1}{(\frac{2x+1}{x-1})-1} = \frac{5x+1}{x+2}$.

$f^3(x) = f(f^2(x))$ est définie si $x \in D(f^2)$ et si $f^2(x) \in D(f)$. $f^3(x)$ est définie si $x \neq -2$, $x \neq 1$ et si $\frac{5x+1}{x+2} \neq 1$ soit $5x + 1 \neq x + 2$ et $x \neq \frac{1}{4}$. D'où $D(f^3) = \mathbf{R} \setminus \{-2 ; \frac{1}{4} ; 1\}$et

$f^3(x) = f(\frac{5x+1}{x+2}) = \frac{2(\frac{5x+1}{x+2})+1}{(\frac{5x+1}{x+2})-1} = \frac{11x+4}{4x-1}$.

$f^4(x) = f(f^3(x))$ est définie si $x \in D(f^3)$ et $f^3(x) \in D(f)$. $f^4(x)$ est donc définie si $x \neq -2$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq 1$ et si $\frac{11x+4}{4x-1} \neq 1$, soit $11x + 4 \neq 4x - 1$, et $x \neq -\frac{5}{7}$. D'où $D(f^3) = \mathbf{R} \setminus \{-2 ; -\frac{5}{7} ; \frac{1}{4} ; 1\}$et

$f^4(x) = f(\frac{11x+4}{4x-1}) = \frac{2(\frac{11x+4}{4x-1})+1}{(\frac{11x+4}{4x-1})-1} = \frac{26x+7}{7x+5}$.