Leçon 09 – Correction des exercices

Les exercices avec une * sont intéressants mais plus difficiles et peuvent être sautés.

Exercice 1 - Soit X_1, X_2 et X_3 , trois vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ tels que :
$X_1 = (-1,5,2)$, $X_2 = (2,-1,2)$ et $X_3 = (1,1,3)$
1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes : $3X_1 - 2X_2 + X_3$; $3(X_1-X_3) +X_2$
2) Trouver trois réels α , β et γ non nuls, tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$ ait ses deux premières composantes nulles .

Solution

1) $3X1 - 2X2 + X3 = 3(-1, 5, 2)-2(2, -1, 2) + (1, 1, 3) = (-3, 15, 6) – (4, -2, 4) + (1, 1, 3)$

$= (-3-4+1, 15+2+1, 6-4+3) = (-6, 18, 5)$

$3(X1-X3) +X2 = 3[(-1, 5, 2)-(1, 1, 3)] + (2, -1, 2)=3(-1-1, 5-1, 2-3) + (2, -1, 2)$

$= 3(-2, 4, -1) + (2, -1, 2) = (-6, 12, -3) + (2, -1, 2) = (-4, 11, -1)$

2) $\alpha X1 + \beta X2 + \gamma X3 = \alpha (-1, 5,2) + \beta (2,-1,2) + \gamma (1,1,3) = (-\alpha+2\beta+ \gamma,5\alpha-\beta+\gamma,2\alpha-\beta+3\gamma)$
$(-\alpha+2\beta+ \gamma,5\alpha-\beta+\gamma,2\alpha-\beta+3\gamma) =(0, 0, 2\alpha-\beta+3\gamma)$ donc on a :
$\begin{cases} -\alpha+2\beta+ \gamma = 0 \\ 5\alpha-\beta+\gamma = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \gamma = -3\alpha \end{cases}$. Ce système de 2 équations à 3 inconnues a un infinité de solutions en $(\alpha , \beta , \gamma)$ de la forme $(\alpha , 2\alpha , -3\alpha)$.

Exercice 2 - Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{IR}^3$?
$A = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; 3x -5y + z = 0 \}$; $B = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; 2x - 3y + 5z = 1 \}$
$C = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; 2x + 3y + z \geq 0 \}$; $D = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; xyz = 0 \}$
$E = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; (x,y,z) = (x+y+z)(2,3,1) + (x-y)(5,-1,2) \}$

Solution

$A = \{(x, y, z)\in \mathbf{R}^3 ; 3x -5y + z = 0 \}$
$A \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0)\in A$.
Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de A et λ et μ sont deux réels quelconques :
$\lambda X_1 + \mu X_2 = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2)$ et
$3(\lambda x_1+\mu x_2) - 5(\lambda y_1+\mu y_2) + (\lambda z_1+\mu z_2) = \lambda(3x_1-5y_1+z_1) + \mu(3x_2-5y_2+z_2) = 0$ car X_1 et X_2 appartiennent à A (c'est à dire $3x_1 -5y_1 + z_1 = 0$ et $3x_2 -5y_2 + z_2 = 0$). $\lambda X_1+\mu X_2$ appartient donc à A de sorte que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$B = \{(x, y, z)\in \mathbf{R}^3 ; 2x - 3y + 5z = 1 \}$
(0, 0, 0) n'est pas un élément de B. B n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; 2x + 3y + z \geq 0\}$

On remarque que X= (1,1 ,1) est un élément de C car $2+3+1=6 \geq 0$, mais -X n'est pas un élément de C étant donné que $-2-3-1= -6 < 0$.
L'ensemble C n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ xyz = 0\}$
X= (1, 1, 0) est un élément de D ($1\times1\times0= 0$)et Y= (0, 0, 1) est aussi un élément de D ($0\times0\times1=0$).
Mais X+Y= (1, 1, 1) n'est pas un élément de D ($1\times1\times1=1\neq0$).
L'ensemble D n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ (x, y, z) = (x+y+z)\ (2, 3, 1) + (x-y)\ (5, -1, 2)\}$
On peut réécrire E
$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x, y, z) = (2(x+y+z), 3(x+y+z), 1(x+y+z)) + (5(x-y), -1(x-y), 2(x-y))\}$
$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ (x, y, z) = (7x-3y+2z, 2x+4y+3z, 3x-y+z)\}$
$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ (7x-3y+2z=x, 2x+4y+3z=y, 3x-y+z=z)\}$
$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ (6x-3y+2z=0, 2x+3y+3z=0, 3x-y=0)\}$
Or $\begin{cases} 6x-3y+2z = 0 \\ 2x+3y+3z = 0 \\ 3x-y = 0 \end{cases}$ équivaut à $x = y = z = 0$. Donc $E = \{(0,0,0)\}$ et E est un espace vectoriel.

Exercice 3*- Montrer que l'ensemble **E** des fonctions f de la variable x définies sur [0,1] et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.
En est-il de même pour l'ensemble **F** des fonctions g définies sur [0,1] et vérifiant $g(1) = g(0) + 1$?

Solution

Considérons l'ensemble **E** des fonctions numériques de la variable x définies sur [0,1] et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ muni de l'addition comme loi interne et la multiplication comme loi externe.
On remarque que la fonction nulle est un élément de **E** (c'est la fonction qui à tout x on lui associe 0 et que nous noterons **0**) car : $f(1) = f(0) = 0$ et donc $f(1) = 2f(0)$.
Pour toute fonction f de **E** :
$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f$
La fonction nulle est **l'élément neutre** de **E** et **E** est non vide.

Remarque : soient f et g deux fonctions de **E** on a :
$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2f(0) + 2g(0) = 2(f(0) + g(0)) = 2(f+g)(0)$
donc f + g est un élément de **E**.

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ pour tout x élément de [0,1], donc la loi est **commutative**.

Soit f, g et h trois fonctions de **E** , $f + (g + h)$ et $(f + g) + h$ sont des éléments de **E** d'après la remarque précédente, d'autre part pour tout x de [0 , 1] :
$f(x)+(g(x)+h(x))= (f(x)+g(x))+h(x)= f(x)+g(x)+h(x)$
d'où : $f + (g + h)= (f + g) + h= f +g +h$ et la loi est **associative**

Pour toute fonction f de **E**
-f est aussi un élément de **E** car :
Comme f est un élément de **E** on a $f(1) = 2f(0)$ d'où $-f(1) = -2f(0)$

$f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
Donc $f - f = \mathbf{0}$, c'est à dire : $-f$ est l'**opposée** de f

Remarque : pour tout réel λ, pour tout élément f de **E**, $\lambda.f$ est aussi un élément de **E** car : $\lambda.f(1) = \lambda\, f(1) = 2\lambda\, f(0)$.

En utilisant la remarque précédente pour tous réels λ et μ , et pour tout f de **E**, $(\lambda + \mu).f$ appartient à **E** et pour tout $x \in [0,1]$, $(\lambda + \mu).f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$ d'où :
$\boldsymbol{(\lambda + \mu).f = \lambda f + \mu f}$.

Pour tous éléments f et g de **E** , pour tout réel λ :
$\lambda.(f + g)$ est aussi un élément de **E** (d'après les deux remarques précédente).
Et pour tout $x \in [0,1]$, $\lambda.(f + g)(x) = \lambda f(x) + \lambda\, g(x)$.
D'où : $\boldsymbol{\lambda.(f + g) = \lambda f + \lambda\, g}$
Pour tous réels λ et μ, pour tout élément f de **E,** d'après la dernière remarque $\lambda.(\mu.f)$ est aussi élément de **E** et pour tout $x \in [0,1]$, $\lambda.(\mu f)(x) = (\lambda\mu) f(x)$.
Et $\boldsymbol{\lambda.(\mu.f) = (\lambda\mu).f}$
Pour tout élément f de **E** et pour tout x de [0 , 1] ; $1.f(x) = f(x)$, donc $\mathbf{1.f = f}$.
D'où finalement (**E**, +, .) est un espace vectoriel.

F n'est pas un espace vectoriel car le seul élément neutre possible pour l'adition des fonctions est **0** et bien sûr **0** n'appartient pas à **F**.

Exercice 4 - Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$?
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, z = 0\}$; $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, y \leq 0\}$;
$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, y = z+t\}$; $I = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, xy = 0\}$;
$J = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, y \in \mathbf{Q}\}$; $K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, z = x^2\}$

Solution

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, z = 0\}$

$F \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0, 0) \in F$.
Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux éléments de F et λ et μ sont deux réels quelconques :
$\lambda X_1 + \mu X_2 = \lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2) = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2, \lambda t_1+\mu t_2)$ et $(\lambda z_1+\mu z_2) = 0$ car X_1 et X_2 appartiennent à F (c'est à dire $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$). $\lambda X_1+\mu X_2$ appartient donc à Fet F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, y \leq 0\}$
Pour tout $X=(x, y, z, t)$ élément de G on a alors $y \leq 0$ mais $-X=(-x, -y, -z, -t)$ n'est pas un élément de G vu que si $y \neq 0$, $-y < 0$.
G n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, y = z+t\}$
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, y - z - t = 0\}$
$H \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in A$.
Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux éléments de H et λ et μ sont deux réels quelconques :
$\lambda X_1 + \mu X_2 = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2, \lambda t_1+\mu t_2)$. Or puisque X_1 et X_2 appartiennent à H, $y_1 = z_1 + t_1$ et $y_2 = z_2 + t_2$, donc $\lambda y_1 = \lambda(z_1 + t_1)$ et $\mu\, y_2 = \mu(z_2 + t_2)$, d'où

$\lambda y_1+\mu y_2 = (\lambda z_1 + \lambda t_1) + (\mu z_2 + \mu t_2) = (\lambda z_1+\mu z_2) + (\lambda t_1+\mu t_2)$ et $\lambda X_1+\mu X_2$ appartient donc à H. H est donc bien un sous-espace vectoriel de **IR**^{4}.

$I = \{(x, y, z, t)\in \mathbb{R}^4 \ ; xy = 0\}$
X= (1, 1, 0, 1) est un élément de I et Y= (0, 1, 1, 1) est aussi un élément de I.
Mais X+Y= (1, 2, 1,2) n'est pas un élément de I
$J = \{(x, y, z, t)\in \mathbb{R}^4 \ ; y\in \mathbf{Q}\}$
J n'est pas un sous-espace vectoriel de **IR**^{4} car :
X=(1, 1, 1, 1) est un élément de J mais λX n'est pas un élément de J si λ est un irrationnel
I n'est donc pas un sous-espace vectoriel de **IR**^{4}**.**

$K = \{(x, y, z, t)\in \mathbb{R}^4 \ ; z = x^2\}$
X = (1, 1, 1, 1) est un élément de K et Y=(2, 1, 4, 4) est aussi un élément de K
mais X+Y=(3, 2, 5, 5) n'est pas un élément de K vu que $3^2 = 9 \neq \mathbf{5}$.
K n'est pas un sous-espace vectoriel de **IR**^{4}.

Exercice 5 - Les vecteurs suivants engendrent-ils **IR**^{3} :
1) (2,-1,4) , (3,1,2) et (0,2,-1).
2) (4,-1,0) , (1,1,1) et (-7,3,1).
3) (1,1,2) , (-3,2,1) , (0,5,7) et (0,1,-1).

Solution

Pour qu'un système engendre **IR**^{3} il faut que son rang soit égal à trois ou qu'il contienne trois vecteurs libres de **IR**^{3}.
1) Le système {(2,-1,4), (3, 1, 2) et (0, 2, -1)} libre si et seulement si le déterminant D de ses trois vecteurs est non nul (propriété du cours admise).

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-1)+3\times2\times4+0\times(-1)\times2-[0\times1\times4+3\times(-1)\times(-1)+2\times2\times2]$$
$D = -2+24-3-8=11\neq 0.$

Les trois vecteurs engendrent bien **IR**^{3}

2) De même on calcule le déterminant de ces trois vecteurs:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\times1\times1+1\times3\times0+ (-7) \times (-1)\times1-[(-7)\times1\times0+1\times(-1)\times1+4\times3\times1]$$
$D = 4+7+1-12 = 0$

Les trois vecteurs n'engendrent pas **IR**^{3}

3) (1, 1, 2), (-3, 2, 1), (0, 5, 7) et (0, 1, -1).

Comme les quatre vecteurs appartiennent à $\mathbf{IR}^3$. Ici on procède de même, on cherche si parmi ces 4 vecteurs, 3 sont indépendants en calculant leur déterminant. Par exemple si on prend (1, 1, 2), (-3, 2, 1) et (0, 1, -1) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times2\times(-1)+(-3)\times1\times2+0\times1\times1-[0\times2\times2+(-3)\times1\times(-1)+1\times1\times1]$$

$D = -2-6+2 = -6 \neq 0$

Le système {(1, 1, 2), (-3, 2, 1), (0, 1, -1)} est libre et les 4 vecteurs (1, 1, 2), (-3, 2, 1), (0, 5, 7) et (0, 1, -1) forment un système de rang 3.

Les quatre vecteurs (1, 1, 2), (-3, 2, 1), (0, 5, 7) et (0, 1, -1) engendrent $\mathbf{IR}^3$

Exercice 6 - Montrer que dans ces différents cas X_1 , X_2 et X_3 sont dépendants et trouver une relation entre X_1, X_2 et X_3 .

1) $X_1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (2,4,2)$ et $X_3 = (2,7,3)$

2) $X_1= (2,3,-1)$, $X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3,-4,0)$

3) $X_1 = (8,2,1)$, $X_2 = (-1,3,5)$ et $X_3 = (10,22,32)$

Solution

1) $X_1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (2, 4, 2)$ et $X_3 = (2, 7, 3)$

Supposons donc qu'il existe 3 réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 = \mathbf{0}$

Soit λ_1 (1,-1,0) + λ_2 (2, 4,2) + λ_3 (2, 7,3) = (0, 0, 0)

On obtient alors $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$, et en utilisant la méthode de Gauss :

$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$ Soit $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_3 = -\frac{3}{2}\lambda_3 \end{cases}$.

Les vecteurs sont donc dépendants. On peut par exemple poser $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ et $\lambda_3 = 2$, on obtient : $2X_1 - 3X_2 + 2X_3 = \mathbf{0}$.

2) $X_1= (2, 3, -1)$, $X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3, -4, 0)$

Supposons qu'il existe 3 réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 = \mathbf{0}$

Soit $\lambda_1(2,3,-1) + \lambda_2(0,-1,3) + \lambda_3(-3,-4,0) = (0,0,0)$

D'où $\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_3 = \frac{2}{3}\lambda_1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}\lambda_1 \end{cases}$.

Les vecteurs sont donc dépendants. On peut par exemple poser $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$, on obtient : $3X_1 + X_2 + 2X_3 = \mathbf{0}$.

3) $X_1 = (8, 2, 1)$, $X_2 = (-1, 3, 5)$ et $X_3 = (10, 22, 32)$

Par la même méthode on obtient $2X_1 + 6X_2 = X_3$
Les vecteurs sont dépendants.

Exercice 7 - Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées et donner leur rang
1) {(2,1) , (-3,2) , (4,3) , (1,1)}
2) {(4,1) , (2,3)}
3) {(3,-1,2) , (4,1,1) , (0,-2,1)}
4) {(0,3,2,-1) , (3,-2,1,1) , (1,1,1,1) , (4,-3,1,-2).

Solution

1) {(2,1), (-3,2), (4,3), (1,1)}
Cette famille est forcément liée et car cette famille est composée de plus de deux vecteurs de $\mathbf{IR}^2$. D'autre part son rang est au plus 2 puisque ce sont des vecteurs de $\mathbf{IR}^2$.
Le rang est deux car le déterminant du système {(2,1), (-3,2)} est $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+3=7\neq 0$.

2) {(4,1), (2,3)}
Cette famille est libre de rang 2 puisque le déterminant est égal à $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12-2=10\neq 0$.

3) {(3,-1,2), (4, 1, 1), (0,-2,1)}. C'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ qui sera donc libre si et seulement si le déterminant de ces trois vecteurs est non nul.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1\times1+4\times(-2)\times2-[4\times(-1)\times1+3\times(-2)\times1] = 3-16-(-4-6) = -3\neq 0$$

Donc cette famille est libre et son rang = 3.

4) {(0, 3, 2, -1), (3,-2, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (4, -3, 1,-2)}
Dans $\mathbf{IR}^4$ nous n'avons pas le déterminant à notre disposition, il faut donc revenir à la définition. Supposons donc qu'il existe 4 réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que :
$\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 + \lambda_4X_4 = \mathbf{0}$.
Soit $\lambda_1 (0, 3, 2, -1) + \lambda_2 (3, -2, 1, 1) + \lambda_3 (1, 1, 1, 1) + \lambda_4 (4, -3, 1, -2) = (0, 0, 0, 0)$. Cela se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En changeant l'ordre des équations :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 - 9\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 - 11\lambda_4 = 0 \\ 9\lambda_3 - 24\lambda_4 = 0 \\ 11\lambda_3 - 31\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 - 11\lambda_4 = 0 \\ 9\lambda_3 - 24\lambda_4 = 0 \\ 15\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{La solution est donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$ d'où les 4 vecteurs sont linéairement indépendants et le rang est de 4.

Exercice 8 - Déterminer le rang des systèmes suivants :
1) {(0,1) , (1,-2) , (4,3) }
2) {(3,1,2) , (4,2,0) , (1,3,-2)}
3) {(0,1,0,2) , (1,1,-1,0) , (2,0,1,1)}
4) {(1,-1,0) , (2,0,1) , (2,6,4)}

Solution

1) {(0,1), (1,-2), (4,3)}
Ce système est de rang ≤ 2 car les vecteurs qui le composent sont des vecteurs de $\mathbf{IR}^2$.
Le rang est deux car les deux premiers vecteurs (0, 1) et (1, -2) sont linéairement indépendants (non proportionnels).

2) On calcule le rang du système {(3, 1, 2), (4, 2, 0) et (1, 3, -2) à l'aide du déterminant D des vecteurs :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\times2\times(-2) + 4\times3\times2 + 1\times1\times0 - [1\times2\times2 + 4\times2\times(-2) + 3\times3\times0]$$

$D = 12 + 4 = 16 \neq 0$ donc le rang est 3.

3) {(0, 1, 0, 2), (1, 1, -1, 0), (2, 0, 1, 1)}

Supposons donc qu'il existe 3 réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \mathbf{0}$
Soit λ_1 (0, 1, 0, 2) + λ_2 (1, 1, -1, 0) + λ_3 (2, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)
Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_3 = -1/2\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \\ -2\lambda_2 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

,ce système admet une seule solution (0, 0, 0, 0) et les trois vecteurs sont linéairement indépendants, le système est donc le rang est trois.

Exercice 9 - L'ensemble S = {(2,1,1) , (0,3,5) , (2,4,6) , (1,6,6)} forme-t-il une base de **IR**^{3}? Extraire une base de **IR**^{3} ? Combien de bases de **IR**^{3} peut-on extraire de S ?

Solution

Ce système est forcément lié car il contient 4 vecteurs de **IR**^{3}. Ce n'est pas une base de **IR**^{3}.
On cherche si S contient 3 vecteurs indépendants en utilisant leur déterminant.

Si on prend (2, 1, 1), (0, 3, 5) et (2, 4, 6) :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2x3x6 + 0x4x1 + 2x1x5 - [2x3x1+0x1x6+2x4x5] = 36 + 10 - 6 - 40 = 0.$$

Ces trois vecteurs sont liés.

Si on prend (2, 1, 1), (0, 3, 5), (1, 6, 6) :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2x3x6 + 0x6x1 + 1x1x5 - [1x3x1 + 0x1x6 + 2x6x5] = 36 + 5 - 3 - 60 \neq 0.$$

Ces 3 vecteurs sont libres et forment une base de **IR**^{3}.

Pour répondre à la question suivante, il faut examiner tous les autres systèmes de 3 vecteurs de S.

Si on prend {(2, 1, 1), (2, 4, 6), (1, 6, 6)}:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2x4x6 + 2x6x1 + 1x1x6 - [1x4x1 + 2x1x6 + 2x6x6] ,$$

D = 48 + 12 + 6 - (4 + 12 + 72) = 66 – 88 = -22≠0 et ce système forme une base de **IR^3.**

Si on prend {(0, 3, 5), (2, 4, 6), (1, 6, 6)} :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0x4x6 + 2x6x5 + 1x3x6 - [1x4x5 + 2x3x6 + 0x6x6] = 60 + 18 - (20 + 36)$$

D = 22 ≠ 0. Ce système forme une base de **IR^3.**

Exercice 10 - On considère des ensembles **E** $=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \; ; \; y = 2x\}$ et **F** $= \{(x,x)\in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que **E** et **F** sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et déterminer **E**$\cap$**F**.

Solution

(0, 0) est un élément de **E** donc **E** $\neq \emptyset$.
Soient $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$ deux éléments de **E** et α, β deux réels quelconques.
$\alpha X+ \beta Y= \alpha(x_1, y_1) + \beta (x_2, y_2)= (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)$. Puisque X_1 et X_2 appartiennent à **E**, $y_1 = 2x_1$ et $y_2 = 2x_2$ et donc $\alpha y_1+\beta y_2= \alpha(2x_1)+\beta(2x_2) = 2(\alpha x_1+\beta x_2)$. Donc $\alpha X+ \beta Y$ est aussi un élément de **E** et **E** est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

(0, 0) est un élément de **F** donc **F** $\neq \emptyset$
Soient $X_1 = (x_1, x_1)$, $X_2 = (x_2, x_2)$ deux éléments de **F** et α, β deux réels quelconques.
$\alpha X+ \beta Y= \alpha(x_1, x_1) + \beta (x_2, x_2)= (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha x_1+\beta x_2)$.
Donc $\alpha X+ \beta Y$ est aussi un élément de **F** et **F** est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$

E$\cap$**F** $= \{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x,y)\in$ **E** et $(x,y)\in$ **F**$\} = \{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \; ; \; y = 2x$ et $y = x\}$
E$\cap$**F** $=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 2x = y\}=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 0$ et $y = 0\}$
E$\cap$**F**$= \{(0, 0)\}$.

Exercice 11 - On considère les ensembles suivants :

E $= \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \; ; \; x = y = z\}$; **F** $= \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \; / \; x-2y+z = 0\}$ et
G $= \{(a-b,a+b,2a-3b) \; ; \; a\in \mathbf{R}$ et $b\in \mathbf{R}\}$.

1) Montrer que **E**, **F** et **G** sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer les sous espaces vectoriels **E**$\cap$**F** , **E**$\cap$**G** et **F**$\cap$**G**.

Solution

1) (0, 0, 0) est un élément de **E** et **E** $\neq \emptyset$
Soient $X_1=(x_1, y_1, z_1)$, $X_2=(x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de **E** et α, β deux réels quelconques.
$\alpha X+ \beta Y= \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2)= (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2)$. Puisque X_1 et X_2 appartiennent à **E** : $x_1 = y_1 = z_1$ et $x_2 = y_2 = z_2$, donc $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha z_1 + \beta z_2$ et $\alpha X+ \beta Y$ appartient à **E**. **E** est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(0, 0, 0) est un élément de **F** et **F** $\neq \emptyset$
Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de **E** et α, β deux réels quelconques.
$\alpha X+ \beta Y= \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2)= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$. Puisque X_1 et X_2 appartiennent à **F** : $x_1 - 2y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 - 2y_2 + z_2 = 0$, donc $\alpha(x_1 - 2y_1 + z_1) = 0$ et $\beta(x_2 - 2y_2 + z_2) = 0$,
d'où $\alpha(x_1 - 2y_1 + z_1) + \beta (x_2 - 2y_2 + z_2) = 0$, soit
$\alpha x_1+\beta x_2-2(\alpha y_1+\beta y_2) + (\alpha z_1+\beta z_2) = 0$. Donc $\alpha X+ \beta Y$ appartient à **F** et **F** est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

G $= \{(a-b, a+b, 2a-3b) \; ; \; a\in \mathbb{R}$ et $b\in \mathbb{R}\} = \{(a(1, 1, 2) + b(-1,1,-3) \; ; \; a\in \mathbb{R}$ et $b\in \mathbb{R}\}$.
Donc **G** est l'ensemble des combinaisons linéaires de (1,1,2) et (-1,1,-3). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) **E**$\cap$**F** $= \{(x, y,z)\in \mathbb{R}^3 \; ; \; (x,y,z)$**E et** $(x,y,z)\in$ **F**$\}$.
On remarque ici que tout élément de **E** est aussi élément de **F** (en effet si $x = y = z$, $x - 2y + z = x - 2x + x = 0$) donc **E** est inclus dans **F** et **E**$\cap$**F**$=$**E.**

$\mathbf{E}\cap\mathbf{G} = \{(x, y,z)\in \mathbb{R}^3$; (x,y,z)**E et** $(x,y,z)\in \mathbf{G}\}$
$\mathbf{E}\cap\mathbf{G} = \{(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$; $x = y = z$ et $(x,y,z) = (a\text{-}b, a+b, 2a\text{-}3b)\}$.
Donc $a\text{-}b = a + b = 2a - 3b$ et $a = b = 0$. D'où $\mathbf{E}\cap\mathbf{G} = \{ (0, 0, 0)\}$.

$\mathbf{F}\cap\mathbf{G} = \{(x, y,z)\in \mathbb{R}^3$; (x,y,z)**F** et $(x,y,z)\in \mathbf{G}\}$
$\mathbf{F}\cap\mathbf{G} = \{(x, y, z)\in \mathbf{R}^3$; $x - 2y + z = 0$ et $(x,y,z) = (a\text{-}b, a+b, 2a\text{-}3b)\}$.
Donc $(a - b) - 2(a + b) + (2a - 3b) = 0$, soit $a = 6b$ et $(x,y,z) = (5b, 7b, 9b) = b(5, 7, 9)$.
Et $\mathbf{F}\cap\mathbf{G} = \{(x, y,z)\in \mathbb{R}^3$; $(x,y,z) = (-7b, -5b, -15b) = -b(7, 5, 15), b\in \mathbb{R}\}$
Donc $\mathbf{F}\cap\mathbf{G}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $(5, 7, 9)$.

Exercice 12 - Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par:
$\{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4$; $x - y + z + t = 0\}$
En déduire le rang du système suivant :
$\{(0,1,2,-1) , (1,0,-2,1) , (3,2,0,-1) , (1,1,-1,1)\}$.

Solution

Posons $\mathbf{E} =\{(x, y, z, t)\in \mathbb{R}^4$; $x - y + z + t = 0\}$
$X= (x, y, z, t\in$ **E** si et seulement si $X = (x , x + z + t, z , t) = x(1,1,0,0) + z(0,1,1,0) + t(0,1,0,1)$.
Donc **E** est engendré par $\{(1,1,0,0) , (0,1,1,0) , (0,1,0,1)\}$. Ce système sera une base de **E** s'il est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 3 réels tels que $\lambda_1(1,1,0,0) + \lambda_2(0,1,1,0) + \lambda_3(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$.

Alors $\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et les vecteurs sont indépendants ; ils forment bien une base de **E** et **E** est de dimension 3.
Notons $S = \{(0, 1, 2, -1), (1, 0, -2, 1), (3, 2, 0, -1), (1, 1, -1, 1)\}$.
On remarque que tous les vecteurs de S appartiennent à **E**, le rang de ce système est donc inférieur ou égal à 3. S sera de rang 3 s'il contient 3 vecteurs indépendants. Prenons les trois premiers et cherchons s'ils ont indépendants. :
Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1(0, 1, 2, -1) + \lambda_2(1, 0, -2, 1) + \lambda_3(3, 2, 0, -1) = (0,0,0)$.

Alors $\begin{cases}\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0\\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0\end{cases}$ ou $\begin{cases}\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 = \lambda_2\\ -\lambda_3 = 0\end{cases}$, soit $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et les vecteurs sont indépendants. Le système est bien de rang 3.

Exercice 13 - Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par:
$\{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4$; $x + y - z = 0$ et $x - y + 2t = 0\}$.

Solution

Posons $\mathbf{F} = \{(x, y, z, t)\in \mathbb{R}^4$; $x + y - z = 0$ et $x - y + 2t = 0\}$.
$(x,y,z,t)\in \mathbf{F}$ si et seulement si $(x,y,z,t) = (x, y, x+y, \frac{1}{2}(y - x)) = (x, 0, x, -\frac{1}{2}x) + (0, y, y, \frac{1}{2}y)$,
soit $(x,y,z,t) = x (1, 0, 1, -\frac{1}{2}) + y (0, 1, 1, \frac{1}{2})$. $\{(1, 0, 1, -\frac{1}{2}) , (0, 1, 1, \frac{1}{2})\}$ est donc un

système générateur de **F**. Les deux vecteurs $(1, 0, 1, -\frac{1}{2})$ et $(0, 1, 1, \frac{1}{2})$ étant linéairement indépendants, ils forment une base de **F** et dim**F** = 2.

Exercice 14 - Soient trois vecteurs linéairement indépendants e_1, e_2 et e_3 d'un espace vectoriel **V**.
Que peut-on dire de dim**V** ?

Solution

dim**V** est supérieure ou égale à 3.

Exercice 15 - Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par: $\{(\lambda-\mu , \lambda+\mu , 2\lambda-\mu) ; \lambda\in \mathbf{R} \text{ et } \mu\in \mathbf{R} \}$.

Solution

Posons $\mathbf{G} = \{(\lambda-\mu, \lambda+\mu, 2\lambda-\mu) ; \lambda\in \mathbf{IR} \text{ et } \mu\in \mathbf{IR}\}$.
$(x,y,z)\in \mathbf{G}$ si et seulement si $(x,y,z) = (\lambda, \lambda, 2\lambda) + (-\mu, \mu,-\mu)= \lambda(1, 1, 2) +\mu(-1, 1, -1)$. Les deux vecteurs $(1, 1, 2)$, $(-1, 1, -1)$ engendrent donc **G**. Ces deux vecteurs sont indépendants (car non proportionnels) ils forment une base de **G** et dim**G** = 2.

Exercice 16 - 1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{E} = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 ; x-2y+z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2) Soit **F** le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs (1,1,1) et (3,1,-1). Vérifier que $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. A-t-on **E** = **F** ?

Solution

1) $(x, y, z)\in \mathbf{E}$ si et seulement si $(x, y, z) = (x , y, 2y - x) = x(1 , 0 , -1) + y(0 , 1 , 2)$. **E** est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs $(1, 0 , -1)$ et $(0, 1, 2)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. On peut rajouter que les vecteurs $(1, 0 , -1)$ et $(0, 1, 2)$ engendrent **E**. Ces deux vecteurs sont indépendants (car non proportionnels) ils forment une base de **E** et dim**E** = 2.

2) $(1, 1, 1) \in \mathbf{E}$ (en effet $1 -2\times1 +1 = 0$) et $(3, 1 , -1)\in \mathbf{E}$ (en effet $3 -2\times1 - 1 = 0$). **E** étant un sous-espace vectoriel, s'il contient $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 2)$, il contient toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs et $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. D'autre part **F** est engendré par deux vecteurs indépendants (car non proportionnels), ces vecteurs forment donc une base de **F** et dim**F** = 2. En récapitulant on a $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ et dim**E** = dim **F**, donc **E= F.**

17-1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{E} = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 ; 2x-y+2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de **E**.
2) Soit **F** le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs u = (1,2,0) et v = (2,1,1), déterminer que $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}$.

Solution

1) $(x, y, z) \in \mathbf{E}$ si et seulement si $(x, y, z) = (x , 2x + 2z, z) = x(1 , 2 , 0) + z(0 , 2 , 1)$. **E** est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs (1, 2, 0) et (0, 2, 1), c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{IR}^3$. Les vecteurs (1, 2, 0) et (0, 2, 1) engendrent **E**. Ces deux vecteurs sont indépendants (car non proportionnels) ils forment une base de **E** et dim**E** = 2.

2) $(w = (x,y,z) \in \mathbf{E}) \Leftrightarrow (2x - y + 2z = 0)$

$(w = (x,y,z) \in \mathbf{F}) \Leftrightarrow (\exists \lambda, \mu \in \mathbf{IR}\ ;\ w = \lambda u + \mu v)$

$(w = (x, y, z) \in \mathbf{E} \cap \mathbf{F}) \Leftrightarrow \{ w \in \mathbf{E}$ **et** $w \in \mathbf{F}\}$.

Donc $(w = (x, y, z) \in \mathbf{E} \cap \mathbf{F}) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases} \right)$

Soit $2(\lambda + 2\mu) - (2\lambda + 2\mu) + \mu = 0$ et $\mu = 0$. D'où $(x, y, z) = \lambda(1,2,0) = \lambda u$.

Réciproquement, on vérifie que si $w = \lambda u$ alors $w \in$ **E∩F.**

Donc $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \langle u \rangle$.

Remarque : Ici d'après 1) on a évidemment $u \in \mathbf{E} \cap \mathbf{F}$ et puisque **E∩F** est un sous-espace vectoriel $\langle u \rangle \subset \mathbf{E} \cap \mathbf{F}$ et dim $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} \geq 1$. Puisque dim**E** = dim**F** = 2 (u et v étant non proportionnels, ils forment une base de **F**), dim $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} \leq 2$ (en effet $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ et $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} \subset \mathbf{F}$) . D'autre part si dim $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = 2$, $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \mathbf{E} = \mathbf{F}$. Or $v \notin \mathbf{E} \cap \mathbf{F}$ et $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} \neq \mathbf{F}$.
Donc dim $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = 1$ et $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \langle u \rangle$.

Exercice 18 - Montrer que, dans les différents cas suivants , le système $\{e_1, e_2 , e_3\}$ est une base de $\mathbf{IR}^3$. Exprimer les coordonnées de (-1,2,3) puis celle de (x,y,z) dans cette base .
1) $e_1 = (-1,0,1)$; $e_2 = (1,-1,0)$; $e_3 =(1,1,1)$
2) $e_1 = (1,2,0)$; $e_2 = (0,1,1)$; $e_3 = (1,0,2)$
3) $e_1 = (1,0,2)$; $e_2 = (1,1,2)$; $e_3 = (0,1,1)$

Solution

1) Pour montrer que le système $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, il suffit de montrer que c'est un système libre. En utilisant le déterminant, on a $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Le système est donc bien libre et forme une base de $\mathbf{R}^3$.

Coordonnées de (-1, 2,3) dans $\{e_1, e_2, e_3\}$:

(-1, 2,3) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$ si et seulement si

$(-1, 2,3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Soit

$\begin{cases} -1 = -\alpha + \beta + \gamma \\ 2 = -\beta + \gamma \\ 3 = \alpha + \gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4 = 3\gamma \\ 2 = -\beta + \gamma \\ 3 = \alpha + \gamma \end{cases}$ et $\begin{cases} \gamma = 4/3 \\ \beta = -2/3 \\ \alpha = 5/3 \end{cases}$. D'où les coordonnées de (-1, 2,3) dans

$\{e_1, e_2, e_3\}$: $\begin{pmatrix} 5/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

Coordonnées de X = (x, y, z) dans $\{e_1, e_2, e_3\}$:

X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$ si et seulement si $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, soit:

$\begin{cases} x = -\alpha + \beta + \gamma \\ y = -\beta + \gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y + z = 3\gamma \\ y = -\beta + \gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{cases}$ et $\begin{cases} \gamma = \frac{1}{3}\ (x+y+z) \\ \beta = \frac{1}{3}\ (x-2y+z) \\ \alpha = \frac{1}{3}\ (-x-y+2z) \end{cases}$. D'où les coordonnées de

X = (x,y,z) dans $\{e_1, e_2, e_3\}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\ (-x-y+2z) \\ \frac{1}{3}\ (x-2y+z) \\ \frac{1}{3}\ (x+y+z) \end{pmatrix}$.

2) Pour montrer que le système $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, il suffit de montrer que c'est un système libre. En utilisant le déterminant, on a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

Le système est donc bien libre et forme une base de $\mathbf{IR}^3$.

Coordonnées de (-1, 2,3) dans $\{e_1, e_2, e_3\}$:

(-1, 2,3) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$ si et seulement si

$(-1, 2,3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. D'où

$\begin{cases} -1 = \alpha + \gamma \\ 2 = 2\alpha + \beta \\ 3 = \beta + 2\gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} -1 = 4\gamma \\ 2 = 2\alpha + \beta \\ 3 = \beta + 2\gamma \end{cases}$ et $\begin{cases} -1/4 = \gamma \\ 7/2 = \beta \\ -3/4 = \alpha \end{cases}$. D'où les coordonnées de (-1, 2,3) dans

$\{e_1, e_2, e_3\}$: $\begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$.

Coordonnées de X = (x, y, z) dans $\{e_1, e_2, e_3\}$:

X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$ si et seulement si $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, soit:

$\begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = \beta + 2\gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - y + z = 4\gamma \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = \beta + 2\gamma \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{1}{4}(2x - y + z) = \gamma \\ \frac{1}{2}(-2x+y+z) = \beta \\ \frac{1}{4}(2x+y-z) = \alpha \end{cases}$. D'où les coordonnées de

$X = (x,y,z)$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2x+y-z) \\ \frac{1}{2}(-2x+y+z) \\ \frac{1}{4}(2x - y + z) \end{pmatrix}$.

3) Pour montrer que le système $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, il suffit de montrer que c'est un système libre. En utilisant le déterminant, on a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Le système est donc bien libre et forme une base de $\mathbf{IR}^3$.

Coordonnées de $(-1, 2,3)$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$(-1, 2,3)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$si et seulement si

$(-1, 2,3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Soit

$\begin{cases} -1 = \alpha + \beta \\ 2 = \beta + \gamma \\ 3 = 2\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} -3 = \beta \\ 2 = \beta + \gamma \\ 3 = 2\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$ et $\begin{cases} -3 = \beta \\ 5 = \gamma \\ 2 = \alpha \end{cases}$. D'où les coordonnées de $(-1, 2,3)$ dans

$\{e_1, e_2, e_3\}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Coordonnées de $X = (x, y, z)$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$:

X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$si et seulement si $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, soit:

$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta + \gamma \\ z = 2\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x + y - z = \beta \\ y = \beta + \gamma \\ z = 2\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + y - z = \beta \\ -2x + z = \gamma \\ -x - y + z = \alpha \end{cases}$. D'où les coordonnées de

$X = (x,y,z)$ dans $\{e_1, e_2, e_3\}$: $\begin{pmatrix} -x - y + z \\ 2x + y - z \\ -2x + z \end{pmatrix}$.

Exercice 19 - Démontrer que dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, les vecteurs u = (2,3,-1) et v = (1,-1,-2) d'une part, et les vecteurs u' = (3,7,0) et v' = (5,0,-7) d'autre part, engendrent le même sous espace vectoriel.

Solution

Remarquons que {u , v} et {u' , u'} sont deux systèmes de rang 2 (les vecteurs u et v d'une part, u' et v' d'autre part sont non proportionnels). Donc $\mathbf{E} = < u , v >$ et $\mathbf{F} = < u' , v' >$ sont de dimension 2 et pour montrer que $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ il suffit de montrer que $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$. Or si on montre que u' et v' appartiennent à **E**, **E** étant un sous espace vectoriel, il contiendra alors toutes les combinaisons linéaires de u' et v', c'est à dire **F**. Il suffit donc de montrer que u' et v' appartiennent à **E**.

$(u' \in \mathbf{E}) \Leftrightarrow (\exists \alpha , \beta \in \mathbf{R} ; u' = \alpha u + \beta v)$.

La dernière expression se traduit par :

$\begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta \\ 7 = 3\alpha - \beta \\ 0 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$ soit $\begin{cases} 10 = 5\alpha \\ 7 = 3\alpha - \beta \\ 0 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ conviennent, et $u' \in \mathbf{E}$.

De même :

$(v' \in \mathbf{E}) \Leftrightarrow (\exists \alpha , \beta \in \mathbf{R} ; v' = \alpha u + \beta v)$.

La dernière expression se traduit par :

$\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta \\ 0 = 3\alpha - \beta \\ -7 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$ soit $\begin{cases} 5 = 5\alpha \\ 0 = 3\alpha - \beta \\ -7 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ conviennent, et $v' \in \mathbf{E}$. D'où le résultat.

Exercice 20 - Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{IR}^4$ dont on déterminera la dimension et une base :

$A = \{(\lambda+\mu , 2\lambda , \lambda-2\mu , \mu) ; \lambda \in \mathbf{IR} , \mu \in \mathbf{IR}\}$

$B = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{IR}^4 ; x-z = y-t \}$

Solution

$X \in A$ si et seulement si $X = ((\lambda+\mu, 2\lambda, \lambda-2\mu, \mu) = \lambda(1 , 2 , 1 , 0) + \mu(1 , 0 , -2 , 1)$. A est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de u = (1 , 2 , 1 , 0) et v = (1 , 0 , -2 , 1) et d'après le cours A = < u , v > est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{IR}^4$. Puisque u et v sont indépendants (non proportionnels) ils forment une base de A (ils sont évidemment générateurs) et dimA = 2.

$X = (x , y , z , t) \in B$ si et seulement si $X = (y + z - t, y , z , t)$.
Soit X = y(1 , 1 , 0 , 0) + z(1 , 0 , 1 , 0) + t(-1 , 0 , 0 , 1). B est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de u' = (1 , 1 , 0 , 0) , v' = (1 , 0 , 1 , 0) et w' = (-1 , 0 , 0 , 1) et d'après le cours B = < u' , v' , w' > est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. Montrons que ces trois vecteurs sont indépendants :
Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 u' + \lambda_2 v' + \lambda_3 w' = \mathbf{0}$. Cela se traduit par :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$ d'où nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Les vecteurs sont bien indépendants

et forment une base de B (ils sont évidemment générateurs) et dimB = 3.

Exercice 21 - Soit S_1= { u_1=(a,1,1) , u_2=(-1,-a,-1) , u_3=(1,1,a) }
et S_2 = {v_1=(a,1,1) , v_2=(-1,-a,-1) , v_3=(-1,-1,a) }
Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 ainsi que celui de S_2.

Solution

Calculons le déterminant D_1 des trois vecteurs de S_1 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 3a - 2 = (a - 1)^2(-a - 2).$$

Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ $D_1 \neq 0$ et les vecteurs sont indépendants, le rang de S_1 est alors 3.

Si a = 1, $D_1 = 0$ et rang(S_1) ≤ 2. Or S_1 = {(1 , 1 , 1) , (-1 , -1 , -1) , (1 , 1 , 1)}. Les trois vecteurs de S_1 sont proportionnels et non nuls, donc rang(S_1) = 1.

Si a = -2 , $D_1 = 0$ et rang(S_1) ≤ 2. Or S_1 = {(-2 , 1 , 1) , (-1 , 2 , -1) , (1 , 1 , -2)}. Les deux premiers vecteurs de S_1 sont indépendants car non proportionnels, le rang de S_1 est donc 2.

Calculons le déterminant D_2 des trois vecteurs de S_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - a + 2 = (a - 1)(-a^2 - a - 2).$$ Remarquons que le discriminant de $-a^2 - a - 2$ est négatif et donc que $-a^2 - a - 2$ ne s'annule pas.

Donc si $a \neq 1$, $D_2 \neq 0$ et les vecteurs sont indépendants, le rang de S_2 est donc 3.

Si a = 1, $D_2 = 0$ et rang(S_2) ≤ 2. Or S_2 = {(1 , 1 , 1) , (-1 , -1 , -1) , (-1 , -1 , 1)}. Les deux derniers vecteurs de S_2 sont indépendants car non proportionnels, donc rang(S_2) = 2.

Exercice 22 - Soit v_1 = (4,0,-2) , v_2 = (-8,1,5) et v_3 = (2,0,0). Ces vecteurs sont-ils indépendants ?
On considère le sous espace vectoriel **V** engendré par v_1 et v_2. Quelle est sa dimension ?
Donner une base de **V**. v_3 appartient-il à **V**? v_4 = (-4,2,4) appartient-il à **V**? A quelle condition sur a, b et c un vecteur w = (a,b,c) appartient-il à **V**?

Solution

On calcule le déterminant du système suivant :{ (4, 0, -2), (-8, 1, 5), (2, 0, 0)}.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$ Ces vecteurs sont linéairement indépendants.

v_1 et v_2 sont linéairement indépendants (non proportionnels), ils forment donc une base de V et dimV = 2..
Si v_3 était un vecteur de V il serait une combinaison linéaire de v_1 et v_2 et les trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 seraient dépendants. C'est impossible d'après le résultat précédent. Donc $v_3 \notin V$.

Remarque importante : On va montrer un résultat utile pour les exercices et que vous pourrez utiliser par la suite sans le démontrer :

Si v_1 et v_2 sont indépendants :
$$(w \in < v_1 , v_2 >) \Leftrightarrow (\{v_1, v_2 , w\} \text{ est lié}).$$

Remarque : Si on oublie l'hypothèse "**v_1 et v_2 sont indépendants**", le résultat est faux!! (c.f. *exercice 23*).
Si $w \in < v_1 , v_2 >$), on a évidemment $\{v_1, v_2 , w\}$lié, puisque $w = av_1 + bv_2$. ($av_1 + bv_2 - w = 0$ et tous les coefficients ne sont pas nuls puisque l'un vaut -1).
Réciproque : si $\{v_1, v_2 , w\}$ est lié $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w = 0$ et les coefficients ne sont pas tous nuls. Si $\lambda_3 \neq 0$ $w = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2$ et $w \in < v_1 , v_2 >$). CQFD

D'après le résultat précédent : $(v_4 \in V) \Leftrightarrow (D = \text{dét}(v_1 , v_2 , v_4) = 0)$.

Or $D = \begin{vmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 32 - (8 + 40) = 0$. Donc $v_4 \in V$.

De même : $(w = (a , b , c) \in V) \Leftrightarrow (D_w = \text{dét}(v_1 , v_2 , w) = 0)$.

Or $D_w = \begin{vmatrix} 4 & -8 & a \\ 0 & 1 & b \\ -2 & 5 & c \end{vmatrix} = 4c + 16b - (-2a + 20b) = 2a - 4b + 4c$.

Donc : : $(w = (a , b , c) \in V) \Leftrightarrow (a - 2b + 2c = 0)$

Exercice 23 - 1) Soit $V_1 = (-1,1,0)$, $V_2 = (1,0,2)$ et **F**, le sous espace vectoriel engendré par V_1 et V_2.

a) A quelle condition sur x, y et z, $V = (x,y,z)$ appartient-il à **F** ?

b) Soit $V_3 = (1,1,-1)$, $V_4 = (1,1,2)$ et $V_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants :

$\{ V_1 , V_2 , V_3 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_4 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_5 \}$ et $\{ V_1 , V_2 , V_3 , V_4 \}$.

2)* On se place dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Dire si la proposition suivante est vraie :

$$(S = \{ e_1 , e_2 , e_3 \} \text{ lié}) \Rightarrow (e_3 \in < e_1 , e_2 >).$$

Si la réponse est affirmative, la prouver. Si la réponse est négative, donner un contre-exemple.

Solution

1) a) En utilisant la remarque de l'exercice précédent, puisque V_1 et V_2 sont indépendants :

V = (x, y, z) appartient à **F** si et seulement si $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$.

Or $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 2x + 2y - z$. La condition demandée est donc : $2x + 2y - z = 0$

b) $\{V_1, V_2, V_3\}$: le déterminant de ce système est

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 1 = 5 \neq 0$ le rang de ce système est donc trois.

$\{V_1, V_2, V_4\}$: le déterminant de ce système est

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2 \neq 0$. Ces trois vecteurs forment donc un système de rang 3.

$\{V_1, V_2, V_5\}$ le déterminant de ce système est

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, les trois vecteurs sont donc liés. Mais les vecteurs V_1, V_2 sont indépendants (non proportionnels), le rang de ce système est donc 2.

$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$: les vecteurs de ce système sont des vecteurs de $\mathbf{IR}^3$, donc le rang de ce système est inférieur ou égal à 3. Le rang du système $\{V_1, V_2, V_3\}$ est 3. Ces 4 vecteurs forment donc un système de rang 3

2) A-t-on ($S = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ lié) $\Rightarrow$ ($e_3 \in < e_1 , e_2 >$) ?

Contre exemple : si on choisit $e_1=(1, 1, 1)$, $e_2=(2, 2, 2)$ et $e_3 = (1, 0, 0)$ ce système est lié et pourtant e_3 n'appartient pas à $< e_1 , e_2 > = < e_1 >$.
L'affirmation est donc fausse. Néanmoins elle est vraie si on rajoute l'hypothèse "**e_1 et e_2 sont indépendants**"